

הפקולטה להנדסה ע"ש איבי ואלדר פליישמן  
בית הספר לתארים מתקדמים ע"ש זנדמן סליינר  
המחלקה להנדסת חשמל – מערכות

## **שערוך פרמטרי של שדה מרחבי מתוך מדידות בדידות לא לינאריות רועשות עם יישום עבור מיפוי שדות גשם**

חיבור זה הוגש כעבודת גמר לקראת התואר "מוסמך אוניברסיטה" בהנדסת חשמל  
ואלקטרוניקה

על ידי

**אלעד היימן**

יולי, 2014

הפקולטה להנדסה ע"ש איבי ואלדר פליישמן  
בית הספר לתארים מתקדמים ע"ש זנדמן סליינר  
המחלקה להנדסת חשמל – מערכות

## **שערוך פרמטרי של שדה מרחבי מתוך מדידות בדידות לא לינאריות רועשות עם יישום עבור מיפוי שדות גשם**

חיבור זה הוגש כעבודת גמר לקראת התואר "מוסמך אוניברסיטה" בהנדסת חשמל  
ואלקטרוניקה

על ידי

**אלעד היימן**

העבודה נעשתה בביה"ס להנדסת חשמל  
במחלקת מערכות

בהנחיית פרופ' חגית מסר- ירון

יולי, 2014

## תודות

אני רוצה להודות לפרופסור חגית מסר- ירון על הנחייתה הצמודה, המקצועית, על כך שהיומן העמוס תמיד התפנה לטובת סטודנטים ומחקר. תודה על כך שהתמונה הכללית, אצלך בחדר, על הלוח קטן עם טוש שחור, הפכה תמיד ברורה יותר.

אני רוצה להודות לפרופסור פנחס אלפרט שהוביל יחד עם פרופסור חגית מסר- ירון את קבוצת המחקר בא הייתי חלק וסייע בהבנה המטרולוגית של עבודתי.

אני רוצה להודות לחברי לקבוצת המחקר: עוז הראל, דוקטור נועם דוד, לאורי אוסלנדר, ליוני אוסטרומטסקי וליואב ליברמן. תודה על עצה טובה, שיתוף רעיונות וזמנכם היקר.

במחקר זה נעשה שימוש בנתוני אמת מחברות הסלולר בישראל, פלאפון וסלקום. אני רוצה להודות ליריב דגן, עידו ענבר מחברת סלקום ולגלעד מחברת פלאפון, ללא עזרתם לא הייתי יכול להפגיש את התיאוריה עם המציאות.

אני רוצה להודות להוריי, שתמכו, עזרו, ייעצו וליוו אותי לאורך עבודה זו ובכלל.

אחרונה חביבה אני רוצה להודות לאשתי האהובה ענת, בזכותך גאוסיינים דו מימדים הופכים כובעים מקסיקנים שפורחים באוויר.

## תקציר

במגוון רחב של יישומים נדרש לשלב מדידות מכמות גדולה של חיישנים (סנסורים) לצורך מטרה משותפת. תחום רשת הסנסורים (sensors network) בכלל ורשת הסנסורים האלחוטיים בפרט (wireless sensors network) צובר תאוצה בשני העשורים האחרונים, ומגוון היישומים רק הולך וגדל. במרבית היישומים נדרש שילוב של כמות גדולה של סנסורים.

עבודתנו עוסקת בתרחיש בו מגוון סנסורים חשים באופן שונה את אותו השדה הפיזיקלי. אנו מתמקדים בתיאור מודל כללי המאפשר לשלב סנסורים אלו לצורך שיערוך אחוד של השדה. בנוסף לכך שאנו מאפשרים לכל סנסור לחוש באופן שונה את השדה, אנו מאפשרים גם למדידות לעבור פעולת קוונטיזציה ברזולוציה שונה לכל סנסור. אנו מציגים את משערוך הסבירות המרבית - Maximum Likelihood (ML) עבור המודל הכללי ואת המשערוך הנאיבי אשר מתעלם מפעולת הקוונטיזציה - Naïve Maximum Likelihood (NML). אנו בוחנים ביתר תשומת לב את המקרה הפרטי בו השדה הפיזיקלי הוא שדה פרמטרי לינארי, על מנת להבין כיצד משפיעה התייחסות משערוך ה- ML לפעולת הקוונטיזציה על פעולת השערוך; המקרה הלינארי אף עשוי להתאים ליישומים מסוימים. עבור מקרה זה אנו מראים את הבדלי ביצועי השערוך, הן בתיאוריה והן בסימולציות. אנו אף מציגים עבור המקרה הלינארי שני משערכים נוספים אשר מהווים חלופת ביניים, הן ברמת הביצועים והן בסיבוכיות החישובית שלהם.

עבור המודל הכללי אנו מרחיבים את ההסתכלות עבור תרחישים של חוסר התאמה למודל (mismodeling), כאשר המודל אינו מתאר נאמנה את המציאות. לשם כך פיתחנו משערוך חדש שהוא רובסטי לחלק מהמקרים בהם קיימת חוסר התאמה זו, Robust ML (RML).

את המודל הכללי אנו מיישמים על שיערוך שדה גשם, כאשר שדה הגשם ממודל להיות שדה פרמטרי גאוס, והמדידות של שדה הגשם מתקבלות מתוך חיישני (סנסורים) שהם קווי תקשורת של חברות הסלולר השונות בישראל (סלקום ופלאפון). אופי החישה של כל קו תקשורת עשוי להיות שונה בשל תדרי עבודה שונים, ומדידות הסנסורים עוברות פעולת קוונטיזציה ברזולוציה שונה עבור כל חברות הסלולר. אנו מנתחים את ביצועי המשערכים עבור תרחיש זה בסימולציות.

אנו מסכמים עבודה זו בשערוך אמת של שדה גשם באמצעות המידע המתקבל מחברות הסלולר (סלקום ופלאפון) ומשווים את השדות המשוערכים אל מול תמונת המכ"מ, כפי שהתקבלה בשירות המטאורולוגי באותו הזמן. תוצאות אמת אלו מראות שפיות של יישום המודל הכללי למקרה זה ואף מדגימות את יתרונותיו של המשערוך הרובסטי, כאשר ישנם מקרים בהם הוא מתעלם ממדידות המפריעות לפעולת השערוך התקינה.

# תוכן עניינים

5.....	תוכן עניינים.....	
10 .....	הקדמה .....	1
10 .....	1.1 מוטיבציה .....	
11 .....	1.2 רקע- אמצעי מדידה קיימים לשדות גשם.....	
11 .....	1.2.1 מד גשם (Rain Gauge) : .....	
11 .....	1.2.2 דיסדרומטר (Disdrometer) .....	
12 .....	1.2.3 מכ"מ מזג אוויר (Weather Radar) .....	
12 .....	1.2.4 מד קו מיקרוגל אלחוטי .....	
13 .....	1.3 הקשר בין עוצמת הקליטה לעוצמת הגשם בתווך ברשתות סלולריות.....	
15 .....	1.4 הצגת הבעיה .....	
15 .....	1.4.1 המודל הפרמטרי הכללי : .....	
15 .....	1.4.2 המודל הפרמטרי הבסיסי .....	
16 .....	1.5 עבודות קודמות וסקר ספרות.....	
19 .....	2 שערך- המודל הבסיסי.....	2
19 .....	2.1 דיון במשערכים .....	
24 .....	2.2 השוואה תיאורטית בין משערכי ה- NML ל ML.....	
33 .....	2.3 משערך טיילור .....	
34 .....	2.4 משערך לינארי .....	
34 .....	2.5 סימולציות למודל הפשוט : .....	
35 .....	2.5.1 שילוב מדידות עם רזולוציית קוונטיזציה שווה : .....	
37 .....	2.5.2 שילוב מדידות עם רזולוציית קוונטיזציה שונה : .....	
40 .....	2.6 סיכום .....	
42 .....	3 שערך- המודל הכללי.....	3
42 .....	3.1 דיון במשערכים .....	
44 .....	3.2 מידול ליישום הגשם .....	
44 .....	3.2.1 שלב א'- מידול שדה גשם.....	
47 .....	3.2.2 מודל שדה הגשם : .....	
49 .....	3.2.3 שלב ב' : מידול אופי החישה של הסנסורים .....	
50 .....	3.2.4 הרחבה על ההבדל בין שערך באמצעות מדידת קו תקשורת .....	
52 .....	3.3 סימולציות המודל הכללי.....	
59 .....	3.4 סיכום .....	
61 .....	4 חוסר התאמה למודל- Mismatching .....	4
61 .....	4.1 פרוט על חוסר התאמה למודל.....	
61 .....	4.2 רגישות המשערכים הקיימים במקרה של מודל חסר .....	

62	..... הצגת משערך ה- RML	4.3	
67	..... סימולציות תחת חוסר התאמה למודל	4.4	
73	..... סיכום	4.5	
74	..... נתוני אמת		5
74	..... רקע על הנתונים :	5.1	
76	..... עיבוד הנתונים	5.2	
76	..... 5.2.1 חישוב רמת האפס		
77	..... 5.2.2 סנכרון זמנים		
79	..... 5.2.3 אנטנה רטובה		
80	..... עיבוד התוצאות	5.3	
82	..... קביעת ערך סף הסבירות $\alpha$	5.4	
83	..... תוצאות אמת	5.5	
84	..... 13: 20	5.5.1	
86	..... 13: 25	5.5.2	
87	..... 13: 30	5.5.3	
89	..... 13: 35	5.5.4	
90	..... 13: 40	5.5.5	
92	..... 13: 45	5.5.6	
95	..... 13: 50	5.5.7	
96	..... 13: 55	5.5.8	
98	..... 14: 00	5.5.9	
99	..... 14: 05	5.5.10	
101	..... סיכום תוצאות האמת	5.6	
102	..... סיכום ועבודות המשך		6
104	..... נספחים		7
108	..... ביבליוגרפיה		8

## רשימת סימונים

RSL	—	Received Signal Level.
ML	—	Maximum Likelihood.
NML	—	Naïve Maximum Likelihood.
RML	—	Robust Maximum Likelihood
BMSE	—	Bayesian Mean Square Error.
MSE	—	Mean Square Error.
$\mathbf{x}$	—	Vector sign
$\hat{\mathbf{x}}$	—	Estimator sign
$\Delta_i$	—	Quantization resolution
$Q_i$		Quantization operator of sensor i

## רשימת איורים

14	איור 1.1 קווי התקשורת הזמינים מכל ספקיות התקשורת בישראל
14	איור 1.2 הקשר בין עוצמת גשם לניחות קו התקשורת כפונקציה של תדר העבודה
20	איור 2.1 הטית המדידה כפונקציה של ערך הפרמטר
21	איור 2.2 אמפליטודת ההטיה המחזורית כפונקציה של שונות רעש המדידה
26	איור 2.3 הדגמה גרפית לחישוב פונקציית המחיר
27	איור 2.4 פונקציות המחיר
28	איור 2.5 פונקציות המחיר
28	איור 2.6 פונקציית המחיר
30	איור 2.7 הנגזרת השנייה של פונקציית המחיר
33	איור 2.8 פונקציית המחיר התלת מימדית
36	איור 2.9 ערכי ה-MSE של המשערכים והחסם כפונקציה של $\theta$
38	איור 2.10 ערכי ה-MSE של המשערכים והחסם כפונקציה של $\theta$
39	איור 2.11 ערכי ה-BMSE של המשערכים והחסם הממוצע כפונקציה של שונות הרעש $\sigma^2$
39	איור 2.12 ערכי ה-BMSE של המשערכים והחסם הממוצע עבור תמהיל שונה של מדידות
40	איור 2.13 ערכי ה-RBMSE של המשערכים והחסם הממוצע כפונקציה של כמות הסנסורים
48	איור 3.1 פונקציית גאוסין להמחשה, בעלת הפרמטרים:
48	איור 3.2 שילוב של שתי פונקציות גאוסין להמחשה, בעלות הפרמטרים:
53	איור 3.3 התרחיש הנומינלי
57	איור 3.4 ערכי ה-RMSE עבור המשערכים כפונקציה של מרחק הגאוסין
57	איור 3.5 הגאוסין ה"אמיתי", הגאוסין ה"מתחזה"
58	איור 3.6 ערכי ה-RMSE כפונקציה של שיא גובה הגאוסין R
58	איור 3.7 ערכי ה-NRMSE כאשר הנרמול הוא בערכי הפרמטרים, כפונקציה של שיא גובה הגאוסין R
64	איור 4.1 ערכי פונקציית מחיר ה-RML
69	איור 4.2 כמות המדידות הממוצעת שאינן מקיימות את תנאי הסבירות
70	איור 4.3 שיעור ה-RML
71	איור 4.4 ביצועי המשערכים עבור מיקומים שונים של גורם ה"הפרעה"
72	איור 4.5 ביצועי המשערכים
75	איור 5.1 פריסת קווי תקשורת באזור רמלה של רשת פלאפון וסלקום
76	איור 5.2 מספרי קווי התקשורת לצורך שפה משותפת
77	איור 5.3 מינוס עוצמות הקליטה של קו תקשורת פלאפון מס' 15
78	איור 5.4 סקלת הצבעים הקושרת בין צבע לערך גשם
79	איור 5.5 ערכי הגשם הממוצעים
80	איור 5.6 מינוס עוצמות הקליטה של קווי התקשורת של חברת פלאפון כציר הזמן
81	איור 5.7 תמונת מכ"מ גשם כפי שהתקבלה בשרות המטרולוגי
85	איור 5.8 תוצאת השערוך 13: 20
87	איור 5.9 תוצאת השערוך 13: 25
88	איור 5.10 תוצאות השערוך 13: 30
90	איור 5.11 תוצאת השערוך 13: 35
92	איור 5.12 תוצאת השערוך 13: 40
94	איור 5.13 תוצאת השערוך 13: 45
94	איור 5.14 עורק כפול
96	איור 5.15 תוצאת השערוך 13: 50
97	איור 5.16 תוצאת השערוך 13: 55



99 .....	איור 5.17 תוצאת השערוך 14: 00
100 .....	איור 5.18 תוצאת השערוך 14: 05

## רשימת טבלאות

37.....	טבלה 2.1
38.....	טבלה 2.2
55.....	טבלה 3.1
55.....	טבלה 3.2
70.....	טבלה 4.1
71.....	טבלה 4.2
71.....	טבלה 4.3
73.....	טבלה 4.4
73.....	טבלה 4.5
75.....	טבלה 5.1
84.....	טבלה 5.2
86.....	טבלה 5.3
88.....	טבלה 5.4
89.....	טבלה 5.5
91.....	טבלה 5.6
93.....	טבלה 5.7
95.....	טבלה 5.8
97.....	טבלה 5.9
98.....	טבלה 5.10
100.....	טבלה 5.11
107.....	טבלה 7.1

# 1 הקדמה

בפרק זה נציג את המוטיבציה לעבודתנו, נציג את המוטיבציה לבניית מודל כללי המאפשר שילוב של סנסורים שונים עבור מגוון רחב של יישומים, שנית נציג את המוטיבציה ביישום המודל הכללי על מיפוי שדות גשם. בפרק זה נציג את הרקע הנדרש לטובת יישום המודל על אפליקציית מיפוי שדות גשם, בנוסף נציג את המודל הבסיסי הלינארי ואת המודל הכללי לבעייתנו ואף נסקור את הנעשה בנושא טרם לעבודה זו.

## 1.1 מוטיבציה

בשנים האחרונות הצורך לשילוב אמצעי חישה שונים (סנסורים) המספקים אינפורמציה באופן שונה על סביבת המציאות הולך וגדל. עוד ועוד מערכות משלבות רשת סנסורים שחשים את סביבתם במטרה לגבש תפיסה טובה יותר של המציאות. באופן ספציפי יותר ישנו צורך רחב של שחזור שדות פיזיקליים באמצעות חיישנים מסוגים שונים.

דרך מקובלת למדל שדות פיזיקליים היא באמצעות שדה פרמטרי אשר מיוצג ע"י פונקציה דטרמיניסטית המתארת את השדה המרחבי ותלוי בכמות סופית של פרמטרים לא ידועים. דוגמא לשימושים אלו ניתן לראות בשדה מגנטי המייצר דיפול חשמלי [1], [2], [3]. התפשטות שדה ענן כימיקאלי [4], צורת תאי שדות גשם [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11] ועוד.

בקהילת עיבוד האותות תחום רשתות החיישנים, ה- Wireless Sensor Network (WSN) הוא תחום רחב העוסק בצורך לעבד מידע המתקבל מרכיבים קטנים הפזורים במרחב וחשים את סביבתם [12]. גישה מקובלת ברשתות אלו היא שערך משולב מתוך המידע של כלל הסנסורים, אשר שולחים את מדידותיהם למרכז שערך אחוד. בשל אופי הסנסורים הקטן והחסכוני באנרגיה שידור המדידה נעשה לאחר פעולת קוונטיזציה, כמובן שרזולוציית הקוונטיזציה עשויה להיות שונה עבור הסנסורים השונים, ועל כן שילוב של מדידות בעלות רזולוציית קוונטיזציה שונה זו סוגיה חשובה.

תחום נוסף התופס תאוצה הוא שימוש במידע הקיים ברשתות תקשורת לצורך ניטור סביבתי. מכיוון שתופעות סביבתיות עלולות להפריע לערוצי התקשורת, מידע לגבי איכות ערוצי התקשורת למעשה מכילה מידע רב על הסביבה. מידע על ביצועי הערוץ נאסף ואף נשמר ברשתות התקשורת לצורך תחזוקן השוטפת. שימוש במידע מרשתות תקשורת מסחריות לצורך מיפוי תופעות סביבתיות הוא רק מתבקש והוצג לראשונה ב- [13], במאמר זה הוצע ואף הודגם שימוש ברשת האחורית של חברות הסלולר המאופיינת בעבודה בתדרים גבוהים המושפעים מתופעות סביבתיות לטובת מיפוי תופעות סביבתיות. יתרונות רבים ליישום זה ועוד נרחיב בהמשך, אך צורך ברור העולה משימוש ברשתות תקשורת לצורך מיפוי תופעות סביבתיות הוא הצורך לשלב מידע מסוגים שונים. בראשונה עולה הצורך לשלב רשתות שונות של חברות תקשורת שונות על מנת להגיע לפריסה מריבית של כלל קווי התקשורת החשים את הסביבה. אשר לכל חברה עשוי להיות אופן שונה בה נשמרים ביצועי הערוץ, לדוגמא רזולוציות הקוונטיזציה של עוצמות הקליטה עשויות להיות שונות. בנוסף עולה הצורך לשלב את נתוני התקשורת עם סנסורים אחרים של אותה תופעה סביבתית. דוגמא לכך עולה מהיישום של מיפוי שדה גשם, לצורך מיפוי מיטבי נדרש לשלב את המידע הקיים ברשתות התקשורת עם סנסורים אחרים של שדה הגשם כגון: מדי גשם מכ"מ גשם ועוד.

מתוך דברים אלו ברורה המוטיבציה לספק מודל כללי המתאר אמצעי חישה שונים החשים באופן שונה שדה פיזיקלי הממודל להיות שדה פרמטרי, כאשר לכל מדידה מתווסף רעש מדידה ומבוצעת פעולת הקוונטיזציה שאופיינית במרבית היישומים הן משיקולי שידור והן משיקולי אחסון.

## 1.2 רקע- אמצעי מדידה קיימים לשדות גשם

כאשר מים טריים הוא מצרך נדיר בחלק נכבד בכדור הארץ מחד ואסונות טבע כגון סופות ושיטפונות פוקדים אזורים רבים מאידך, הצורך במיפוי שדות גשם ברור ביותר. לצורך כך נבנו כלי מדידה רבים ויקרים במהלך השנים: מד גשם, מכ"מ, דיסטרומטר ואף נשלחו לווינים לחלל. נרחיב על חלקם:

### 1.2.1 מד גשם (Rain Gauge):

מד גשם משמש למדידת ערך מצטבר של משקעים במיקום הגאוגרפי בו הוא נמצא, בדרך כלל ביחידות של מילימטר. צורות מדי הגשם מגוונות, אך כולן פועלות על עיקרון של כלי הכלה שמכיל את כמות המשקעים המצטברת. מדי הגשם לרוב מנקזים את המשקעים שירדו במטר הריבועי שסביבם לתוך כלי הכלה המודד סה"כ כמות המשקע. לרוב מדי הגשם ממוקמים כשלושים ס"מ מעל האדמה. מדי הגשם בשימוש כבר מהמאה החמישית שלפני הספירה. מדי הגשם של כיום עובדים על אותו העיקרון אך כמובן מדידותיהם נשמרים ונשלחים באופן אוטומטי. היתרון של מד הגשם זה בדיוק של מדידת כמות הגשם המצטבר בנקודתו, חסרונו המרכזי זה העובדה שהוא מאוד נקודתי. אם נסתכל על מדי הגשם כרשת אחת המעוניינת לדגום את שדה הגשם במדינת ישראל כדוגמא, הרזולוציה המרחבית של רשת זו קטנה ביותר. בעוד שעל מנת למפות את שדה הגשם נדרש לדגום את השדה באלפי אם לא עשרות אלפי מיקומים שונים לאורכה ורוחבה של המדינה, בפועל קיימות רק עשרות תחנות מדידה. ניתן לראות בהרחבה ב- [14] כיצד משפיע שגיאת השערוך של שדה הגשם מתוך מדי גשם בעלי רזולוציה מרחבית נמוכה על יישום של התראה מפני שיטפונות, עבור יישום זה מיפוי שדה גשם ברזולוציה מרחבית של פיקסלים המייצגים בעלי  $4 \cdot 4 \text{ [km}^2\text{]}$  הוביל לביצועים פחותים אשר לא ניתן היה לחזות חצי ממקרי השיטפון המדומים.

חסרון נוסף של מדי הגשם זה שלא תמיד ניתן באמצעותם למדוד את עוצמת הגשם הרגעית, בשל אופי המדידה ואופי שמירת הנתונים. הנתונים שנשמרים הם כמות הגשם המצטברת במשך הזמן האחרון, משך זה משתנה ונע בין דקה לעשר דקות ואף מגיע לשעה. עבודה עם נתונים המייצגים את הערך שהצטבר כל דקה מאפשרים יכולת הבנה סבירה של קצב הגשם הרגעי אך נתונים אלו נדירים בכמותם. מרבית התחנות מודדות ערכים מצטברים של עשר דקות או שעה, ככה שנאבדת היכולת להסתכל ברזולוציה זמנית גבוהה על השינויים הרגעים בשדה הגשם.

### 1.2.2 דיסדרומטר (Disdrometer)

מד הדיסטרומטר הוא מד המבוסס על שידור של קרני לייזר מצדו האחד של המכשיר לתוך האוויר של כעשרות ס"מ וניתוח של קליטתה מצדו השני. באמצעות ניתוח קליטת קרן הלייזר המכשיר יודע לנתח את צורת הטיפות (Drops Size Distribution) העוברות בתווך. אופן מדידה זה מאפשר הפרדה בין משקעים שונים- גשם, שלג, תערובת של שניהם וכו'. בנוסף ישנו יתרון ביחס למד הגשם ביכולת למדוד את קצב הגשם הרגעי.

החיסרון המרכזי של מכשיר זה הוא אופי דגימתו הנקודתי של שדה הגשם כפי שהרחבנו על מד הגשם, בנוסף עלותו יקרה בהרבה ממד הגשם, ולכן כמות מדי הדיסטרומטר קטנה בסדרי גודל ביחס לכמות מדי הגשם.

### 1.2.3 מכ"מ מזג אוויר (Weather Radar)

השימוש ביכולות מכ"מ לצרכי מדידת משקעים החל ב-1948. מכ"מי הדופלר מבוססים על תופעת הדופלר המקשרת בין צורת גל לתנועת המקור ביחס לגלאי. מכ"מי הדופלר הם הנפוצים ביותר לשימושי מזג אוויר. היתרון המרכזי של מכ"מ זה תפיסתו הרחבה של המרחב בו הוא מופעל. מכ"מ בודד מסוגל לכסות אלפי ק"מ רבועים. אחד החסרונות המובנים של המכ"מ זה דיוקו, אופי המדידה שלו מכיל אי דיוקים רבים כפי שמתואר ב-[15]. חסרון נוסף זה חוסר היכולת של מכ"מ מזג אוויר לחסות את אזורים שלמים: אלו הקרובים לו ביותר, הרחוקים ממנו או מוסתרים בשל תנאי טופוגרפיה משתנים. בנוסף, מכ"מ מזג האוויר חש את שדה הגשם כפי שהוא רואה אותו בגובה בו גלי המכ"מ פוגשים את שדה הגשם, חלקו של הגשם אינו מגיע לקרקע ומתאדה וחלקו שמגיע לקרקע במיקום גאוגרפי שונה בשל משטר הרוחות. חסרונות מרכזיים נוספים הם העלויות הגבוהות של המכ"מ הן ברכישתו הן בתחזוקתו השוטפת.

### 1.2.4 מד קו מיקרוגל אלחוטי

מד קו המיקרוגל (Microwave Link) מתבסס על הקשר הפיזיקלי בין עוצמת גשם לניחות עוצמת הסיגנל בתווך. הקשר מתבסס על יכולת טיפות הגשם לבלוע ואף לפזר גלים אלקטרו מגנטיים העוברים דרכו. הקשר בין ניחות עוצמת הסיגנל לעוצמת הגשם בתווך ידועה זה עשרות שנים [2], ונעסוק בהרחבה בקשר זה בתת פרק הבא 1.3.

כבר לפני שני עשורים הוצע להשתמש בקווי מיקרוגל לצורך מדידת משקעים [16] היתרון של שימוש בקו מיקרוגל למדידת מזג האוויר הוא בקרבתו לקרקע ובשל כך הוא מודד את הגשם המגיע לקרקע במיקום המדויק. יתרון נוסף למד זה, זו העובדה כי הוא מכיל אינפורמציה על שדה הגשם לכל אורך הקו. עובדה זו מאפשרת באמצעות כמות קטנה יחסית של קווי מיקרוגל לקבל "אחיזה" טובה של שדה הגשם. יתרון נוסף לקו המיקרוגל זה ביכולתו למדוד את עוצמת הגשם הרגעית הנדרשת ליישומים ומחקרים רבים.

החיסרון המרכזי של מד זה הם עלויותיו הגבוהות. לייצר קו מיקרוגל ייעודי לצורך חישת שדה גשם למעשה לא כלכלי ולכן למרות שכבר לפני יותר משני עשורים הוצע ע"י Giuli למדוד משקעים באמצעות קווי תקשורת ייעודים, הדבר אינו יצא אל הפועל.

ב 2006 הוצע לראשונה [13] השימוש בנתוני רשתות תקשורת מסחריות קיימות לצורך מיפוי תופעת מזג אוויר. רשתות התקשורת הסלולרית מנהלות רשת תקשורת אחורית ע"מ לתקשר בין מרבית התחנות הניחות שלהן אחת עם השנייה. רשת אחורית זו מאופיינית בעבודה בתדרים גבוהים אשר מושפעים באופן משמעותי יותר מתופעות מזג אוויר בתווך קווי המיקרוגל. כחלק מפעולות התחזוקה הנדרשים לרשת זו, עוצמות השידור והקליטה מנותרות באופן קבוע על מנת להעיד על איכות הקווים, מידע זה אף נשמר ברשתות הסלולר השונות.

היתרון המרכזי בשימוש המידע הקיים מרשתות תקשורת מסחריות זה למעשה עלותו האפסית, מידע זה למעשה קיים ונעשה בו שימוש לצרכי תחזוקת הרשת. יתרון מרכזי נוסף זה הרזולוציה המרחבית שיש לרשתות אלו. באיור 1.1 מוצגת הפריסה המרחבית של קווי ה מיקרוגל של שלושת ספקיות הסלולר בארץ כפי שהוצג ב [17].

לשימוש במידע הקיים מרשתות הסלולר גם חסרונות כמובן, בחירת התדרים, אופי הפריסה, הרזולוציה הזמנית ורזולוציות הקוונטיזציה של נתוני השידור והקליטה של קווי ה מיקרוגל נקבעו על פי שיקולי טיוב רשת המיקרוגל ולצורך בקרת איכותו, ללא התייחסות לצורך מיפוי מזג האוויר, לדוגמא ניתן לראות כי בדרום הארץ אין פריסה רחבה של קווי תקשורת.

### 1.3 הקשר בין עוצמת הקליטה לעוצמת הגשם בתווך ברשתות סלולריות

רשתות תקשורת סלולריות עובדות על עקרון של תאים. כל תא מכיל צרכנים ניידים (הטלפונים הניידים) ותחנת בסיס ניידת אשר מרכזת את התקשורת בינה לבין כל הצרכנים הניידים, תקשורת זו מתקיימת בתחום הנמוך (יחסית) של הספקטרום, בתחום הגייגות הבודדות. על מנת שצרכן נייד הנמצא בתא א' ידבר עם צרכן נייד הנמצא בתא ב' נדרשת רשת תקשורת בין התחנות הניידות. צורה מקובלת לניהול רשת כזו היא ע"י תקשורת קו ראייה של קווי מיקרוגל בין תחנה לתחנה כך שלמעשה נוצרת רשת תקשורת, רשת זאת נקראת הרשת האחורית (Backhaul). לרשת אחורית זו מאפייני עבודה בתדרים גבוהים (15-50 GHz) וטווחי עבודה ארוכים (1-20 Km). עבודה בתדרים גבוהים אלו גורמת לאורכי הגל להיות בסדרי גודל של טיפת גשם תופעה זו יוצרת הפרעות תקשורת כפי שמתואר בהרחבה ב [18].

באיור 1.2 ניתן להתרשם מהקשר בין עוצמת הניחות של אות המיקרוגל לתדרי העבודה השונים, כפי שהוצג בהרחבה ב [19]. ניתן לראות שבתחום התדרים בהם עובדים רשתות התקשורת המסחריות, כל עוצמות הגשמים משפיעים על עוצמת אות המיקרוגל. בעוד שהתדר הוא מאפיין דומיננטי בקשר בין עוצמת גשם לניחות, ישנם גורמים נוספים כגון: קיטוב השידור, טמפרטורה חיצונית, צורת הטיפה האופיינית ועוד. תיאור הקשר המדויק בין עוצמת הגשם לניחות בקו התקשורת סבוך אך ב (1.1) מתואר הקשר אמפירי מקובל ומדויק מספיק למרבית הצרכים:

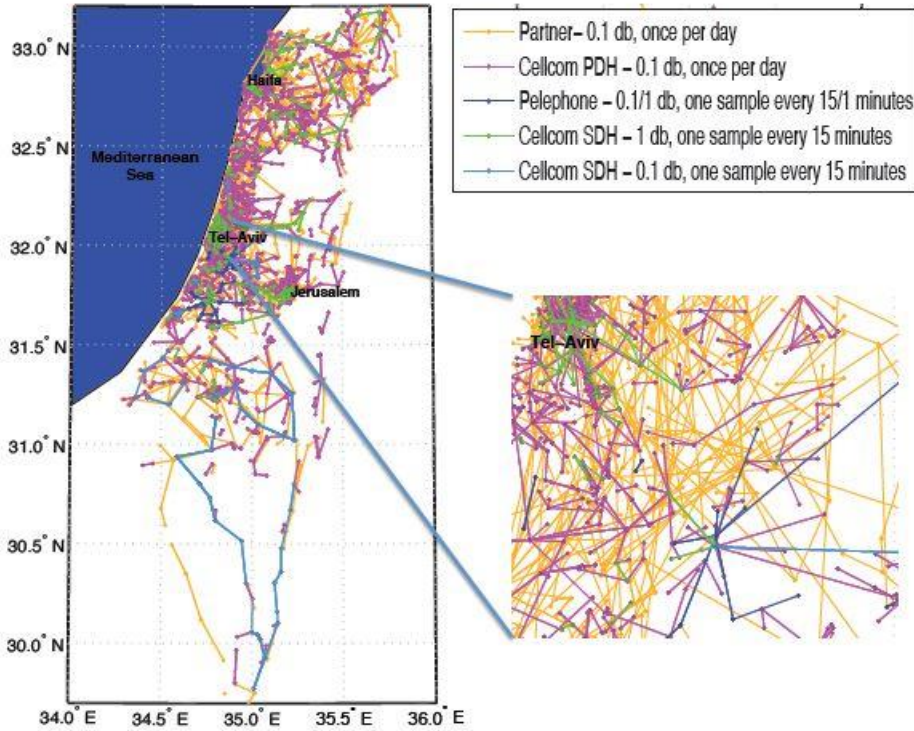
$$(1.1) \quad A = aR^b$$

כאשר  $A$  [dB/Km] זו עוצמת הניחות של אות התקשורת לק"מ בודד,  $R$  [mm/hr] זה קצב הגשם הרגעי,  $a, b$  הינם קבועים הנקבעים כפונקציה של תדר העבודה, פולריות השידור, טמפרטורה וצורת הטיפה האופיינית. אך בקרוב טוב ניתן לקבוע את הקבועים עפ"י הגורם המרכזי שהוא תדר העבודה כפי שמפורט בהרחבה ב [20] ומוצג ב (1.2).

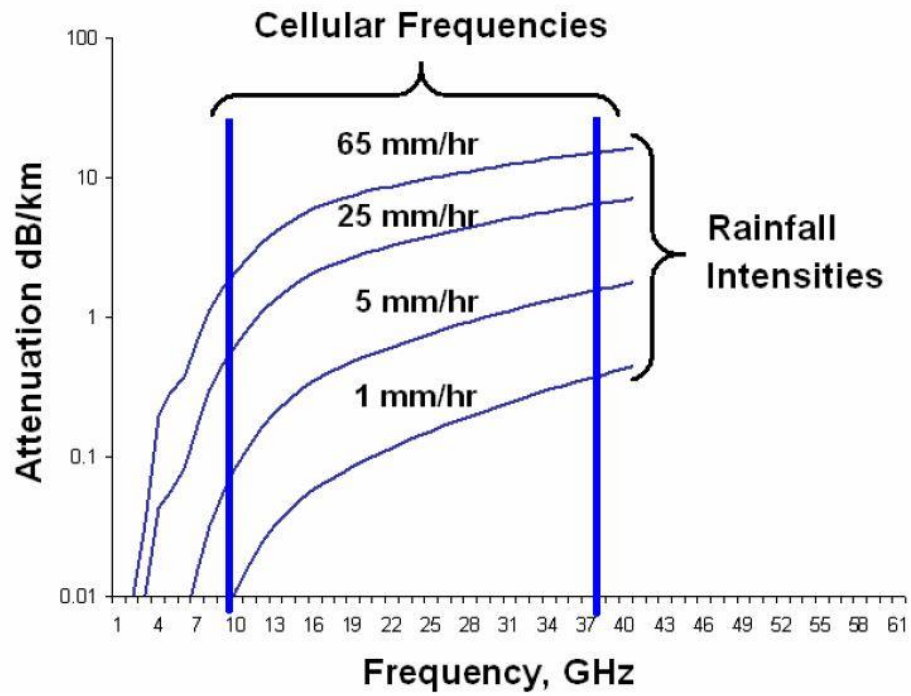
$$(1.2) \quad a = \begin{cases} 4.21 \cdot 10^{-5} f^{2.49} & 2.9 < f < 54 \text{ GHz} \\ 4.09 \cdot 10^{-2} f^{0.699} & 54 < f < 180 \text{ GHz} \end{cases}$$

$$b = \begin{cases} 1.41 \cdot f^{-0.0779} & 8.54 < f < 25 \text{ GHz} \\ 2.63 \cdot f^{-0.272} & 25 < f < 164 \text{ GHz} \end{cases}$$

מתוך הבנת הקשר בין עוצמת הגשם הרגעית לניחות בקו התקשורת ניתן יהיה בפרקי המשך למדל את הקשר בין שדה גשם פרמטרי למדידת קו תקשורת.



איור 1.1 קווי התקשורת הזמינים מכל ספקיות התקשורת בישראל (סלקום, פלאפון ופרטנר), כאשר הרזולוציה הזמנית ורזולוציית הקוונטיזציה מוצגים בחלקו הימני עליון של האיור. בחלקו הימני תחתון של האיור מוצגת תמונת הגדל של אזור תל אביב. איור זה הוצג במקור ב- [17]



איור 1.2 הקשר בין עוצמת גשם לניחות קו התקשורת כפונקציה של תדר העבודה.

## 1.4 הצגת הבעיה

### 1.4.1 המודל הפרמטרי הכללי:

בעבודה זו נרצה להציג מודל פרמטרי כללי המתאר חישה של שדה פרמטרי באמצעות סנסורים אשר חשים שדה זה באופן שונה זה מזה. נרצה להתייחס במודל זה גם למקרים בהם למדידות מהסנסורים השונים מתווסף רעש מדידה גאוסית חיבורי לבן בעל שונות מסוימת וידועה (AWGN), בנוסף נרצה כי המודל יכיל בתוכו את פעולת הקוונטיזציה השכיחה ביישומים רבים ועשויה לפעול ברזולוציות משתנות מסנסור לסנסור.

נגדיר שדה פרמטרי כללי  $f(x, y; \theta)$  המתאר נאמנה את השדה הפיזיקלי שאותו חשים הסנסורים השונים. נגדיר פונקציית חישה  $s_i(f(x, y; \theta))$  אשר יכולה להיות שונה בין סנסור לסנסור, כאשר  $i \in [1, 2, \dots, N]$  הוא אינדקס הסנסור,  $N$  - כמות הסנסורים. כעת נציג את המודל המקשר בין מדידה של סנסור  $z_i$  לבין וקטור הפרמטרים  $\theta$ .

$$(1.3) \quad z_i = Q_i(s_i(f(x, y; \theta))) + n_i$$

כאשר  $Q_i(x) = \text{round}\left(\frac{x}{\Delta_i}\right) \Delta_i$  היא פעולת הקוונטיזציה האחד בעל רזולוציית קוונטיזציה  $\Delta_i$ .

$round(x)$  זה פעולת עיגול לערך השלם הקרוב ביותר.  $n_i$  יוגדר להיות רעש גאוסית חיבורי לבן כך ש-  $n_i \sim N(0, \sigma_i^2)$ . כאשר הרעשים של הסנסורים השונים אינם תלויים סטטיסטית אחד בשני. רעש זה ממדל רעש אלקטרוני במכשירי המדידה והן אסופה של תופעות בתוך התקשורת המשפיעות על עוצמת אות התקשורת ובשל אופיים החיבורי והמקומי ממודל להיות רעש גאוסית לבן ובלתי תלוי.

נגדיר את הווקטור  $z$  להיות וקטור המדידות כך ש-  $z = [z_1, z_2, \dots, z_N]^T$ .

נציין כי לצורך פישוט עבודה זו מתייחסת לפעולת הקוונטיזציה כאחידה בעלת רזולוציה קבועה אך ניתן בפשטות להרחיב למקרה של קוונטיזציה כללית בעל רמות חלוקה משתנות.

### 1.4.2 המודל הפרמטרי הבסיסי

נציג תת מודל של המודל כללי כפי שהתקבל במשוואה (1.3). נרצה לתאר מקרה בסיסי בו  $s_i(f(x, y; \theta)) = \theta$ .

תחת הנחה זו ניתן לכתוב את המודל הבסיסי כמדידה רציפה  $y_i$  כפי שמתוארת במשוואה (1.4) שעוברת את פעולת הקוונטיזציה ומתקבלת המדידה  $z_i$  כפי שמתקבלת במשוואה (1.5).

$$(1.4) \quad y_i = \theta + n_i$$

$$(1.5) \quad z_i = Q_i(y_i)$$

מודל זה המוצג במשוואה (1.5) יהווה לנו עוגן לקבלת אינטואיציה לגבי התנהגות וביצועי המשערכים השונים שנציג בהמשך העבודה. למעשה, באמצעות מודל זה, נוכל לבחון כיצד פעולת הקוונטיזציה הלא ליניארית משפיעה על המשערכים השונים באופן פשוט ללא הוספת דרגת קושי בשערוך כגון הוספת פונקציית חישה ושדה פרמטרי שמוסיפים קושי בהבנת ביצועי המשערכים.

## 1.5 עבודות קודמות וסקר ספרות

עבודתנו מתחלקת לשניים, בחלקה הראשון אנו מתארים מודל כללי בו מגוון סנסורים חשים את אותו שדה פרמטרי באופני חישה שונים ומדידתם עוברת פעולת קוונטיזציה בעל רזולוציה שונה מסנסור לסנסור. חלק זה של העבודה עשוי להתאים למגוון רחב של יישומים באופן כללי וליישומי Wireless Sensors Networks (WSN) באופן ספציפי. בתת פרק זה נסקור את הנעשה בתחום ה-WSN בנושא שילוב מדידות בעלות אופי שונה החשים שדה פרמטרי. בחלקה השני של עבודתנו אנו מיישמים את המודל הכללי לטובת מיפוי שדות גשם, בתת פרק זה נסקור עבודות קודמות העוסקות בשיטות שונות למיפוי שדות גשם באמצעות רשת תקשורת סלולרית מסחרית.

יישומים אזרחיים וצבאים רבים עושים שימוש בסנסורים רבים לצרכים מגוונים (לדוגמא: מעקב, גילוי או סיווג של אירועים, ספירת אלמנטים, מיפוי תופעות סביבתיות ועוד). מרביתם המוחלט של היישומים משתמש בסנסורים קטנים, ניידים זולים ודלי הספק. בשל תכונות סנסורים אלו, המידע המופק מסנסור בודד אינו עומד בפני עצמו בשל איכותו שלעיתים ירודה, אופיו המקומי וכוח חישובו הדל, לכן נשלחות מדידותיו למרכז פענוח אחוד לצורך איחוד של כמות מדידות רבה, מתוך הכרה כי ניתן לפצות על איכות הירודה של המדידות באמצעות כמותן. אופי עבודה זה הוליד תחום מחקר ענף בתוך קהילת עיבוד האותות- תחום ה- WSN [21]. חלק מהעבודות בתחום זה מתארים אפליקציות ספציפיות, לדוגמא שימוש ב WSN לצורך מעקב אחר פרפרים [22]. חלק מהעבודות עסקו בנושאים עקרוניים הקשורים בעקיבה וגילוי [23]. עבודות רבות הוקדשו לנושא חיסכון באנרגיה ופעולת הקוונטיזציה לצורך חיסכון בהספק שידור [24].

באשר לתחום בו אנו עוסקים בעבודה זו, שערוך שדה פרמטרי ושילוב מדידות בעלות רזולוציית קוונטיזציה שונה, נעשו מספר עבודות בסביבת נושא זה. ב [25], [26] דנו במודל הליניארי, אך לא במודל הספציפי כפי שהגדרנו אותו כמודל הבסיסי והצגנו במשוואה (1.5). במאמרים אלו לכל המדידות אותה רזולוציית קוונטיזציה. בראשון ניתנה התייחסות לרעשי המדידה בעלי פונקציית פילוג שונה, כלומר הדגש שניתן בעבודה זו הוא בשוני בין פילוג רעשי המדידה השונים ולא בפעולת הקוונטיזציה שהונחה כשווה בין כל המדידות.

ב [27] השדה פרמטרי שהוא שדה אקוסטי במטרה להתחקות אחר מקור הדובר כאשר החיישנים השונים חשו את השדה באותו האופן אך במיקומים שונים, המדידות עברו את פעולת הקוונטיזציה לצורך שידורם למרכז אחוד, בכל החיישנים רזולוציית הקוונטיזציה זהה. ב [28] הגדירו את השדה הדעיכה של עוצמת סיגנל אלקטרומגנטי לצורך שערוך מיקומם של הסנסורים, כאשר רזולוציית הקוונטיזציה שווה בכלם.

ב [29] השדה היינו שדה טמפי' המשוערך מתוך חיישנים ברכבים נוסעים. ב [30] ישנו התייחסות לחיישנים החשים באופן זהה שדה פרמטרי כלשהו ובעלי קוונטיזציה של ביט בודד.



שתי עבודות מעניינות רלוונטיות ביותר לעבודתנו התפרסמו לאחרונה [31], [32] במקביל לעבודתנו. שתי העבודות מתייחסות לשדה פרמטרי כלשהו אשר נדגם באותו האופן ע"י חישנים נקודתיים, על המדידות מבוצעת פעולת קוונטיזציה בעלת רזולוציה זהה עבור כל המדידות.

עבודתנו שונה מעבודות אלו מכיוון שלראשונה אנו מציעים לשלב סנסורים החשים באופן שונה שדה פרמטרי, כלומר כל חיישן בעל פונקציית חישה שונה המקשרת בין השדה הפרמטרי למדידה המתקבלת, כאשר על כל מדידה מבוצעת פעולת קוונטיזציה העשויה להיות שונה מסנסור לסנסור. בנוסף בעבודתנו לראשונה ישנה התייחסות למקרה של *mismodeling*, כאשר השדה הפרמטרי אינו מתאר נאמנה את המציאות לדוגמא. לצורך כך פיתחנו משעך שהוא רובסטי לחלק מהמקרים של חוסר התאמה למודל. בנוסף, בעבודה זו אנו מראים יישום של התיאוריה על אפליקציית מיפוי שדות גשם ובוחנים את התיאוריה במבחן המציאות.

משנת 2006, אשר הוצע לראשונה שימוש בנתוני רשתות תקשורת מסחריות לטובת מיפוי תופעות סביבתיות [13], נעשו עבודות בתחום מיפוי שדה הגשם. בשנת 2009 הוצאו שתי שיטות למיפוי גשם [33], [34]. שתי שיטות אלו למעשה משתמשות בקשר ההפוך לקשר ה-*Power Low* כפי שמופיע במשוואה (1.1), כלומר חישוב ערך הגשם הממוצע על פני קו תקשורת לפי עוצמת הניחות אשר התקבל בקו זה. בשתי הגישות קו התקשורת ממודל לאוסף נקודות במרחב לאורכו ע"י השמת ערכים מתוך הערך הממוצע על כל אחד מהנקודות, נקרא לנקודות האלו נקודות גשם. כעת מתוך נקודות הגשם מתבצעת אינטרפולציה לינארית לשאר הנקודות במרחב כאשר המשקל משתנה כפונקציה של מרחק נקודת המרחב מנקודות של קו התקשורת. גישות אלו הינן אד-הוק ואינן מניחות שדה גשם אלא מבצעת פעולת אינטרפולציה מתוך נקודות הגשם אשר נמדדו בקווי התקשורת. בשנת 2010 בוצע הרחבה להתייחסות הזמנית [35].

בשנת 2013 בוצע עבודת תזה [17] במסגרת לימודי המאסטר של עמיתי לקבוצת המחקר יואב ליברמן. בעבודתנו המשותפת ניתחנו את המקרה בו שדה הגשם היינו שדה פרמטרי. בעבודתו של יואב, המתייחסת לרשת הומוגנית, פעולת הקוונטיזציה המתבצעת על המדידות מוזנחת. בנוסף יואב הופך את מדידות קווי התקשורת השונים לערכי הגשם הממוצעים, ואת קו התקשורת הוא מחלק לנקודות גשם באופן דומה הנעשה בעבודות עבר. באמצעות נקודות הגשם יואב נוקט בשתי גישות, האחת אינטרפולציה למרחב באמצעות אינטרפולציה קובית (*cubic interpolation*), במידה ונקודות הגשם עמדו בתנאים מספקים לשחזור, במידה ולא בוצע שערך פרמטרי של שדה גשם פרמטרי מתוך הנתונים של נקודות הגשם.

עבודתנו שונה מכיוון שהיא מתרכזת בשילוב סנסורים בעלות אופי חישה שונה ולכן אנו מאפשרים לסנסורים שונים להיות בעלי פונקציית חישה שונה ולמדידות להיות בעלות קוונטיזציה ברזולוציה שונה. אומנם שנינו יוצאים מתוך מודל פרמטרי של שדה הגשם אך המודל המלא המתאר את הקשר בין המדידה לשדה הפרמטרים שונה. עובדה זו מאפשרת לנו לבצע, כחלק מפתרון המודל, שערך משותף של סנסורים מסוגים שונים - לדוגמא מד גשם ומכ"מ. שנית, במודל שלנו ניתנת התייחסות לכך שכל קו תקשורת חש באופן שונה את השדה הפרמטרי בשל אורכו ותדרי העבודה השונים בהם הוא עובד. בשל כך בעבודתנו, לראשונה, נעשה שימוש בערך המדידות עצמם לטובת השערך ללא הפיכתם לערכי הגשם הממוצעים לאורך קו התקשורת. הבדל זה עלול להיות לא זניח ומפורט בהרחבה בתת פרק 3.2.4. בחלק זה נכתוב על נושא זה בקצרה כי הבדל העיקרי נובע מכך שקווי תקשורת שונים עשויים לחוש ניחותים שונים עבור אותם ערכי גשם. דבר זה נובע מכך שקווי תקשורת שונים עשויים להיות באורכים שונים ובעלי תדרי עבודה שונים, דבר המשפיע באופן ישיר על ערכי הניחות בקו התקשורת. קווי התקשורת העובדים בתדרים גבוהים יותר ושאוורכים ארוך יותר יחוו ערכי ניחות גבוהים יותר מאשר הקוויים בעלי התכונות הנגדיות. מכיוון שלערך המדידה מתווסף רעש מדידה

וקוונטיזציה המדידות המתקבלות אינן ערכי הניחות עצמם אלא ערכי ניחות רועשים. הפיכת ערכי הניחות לערכי גשם למעשה תגביר את הרעש באופן שאינו שווה לכל קווי התקשורת. ערכי הגשם עבור הקווים הקצרים ו/או העובדים בתדרי עבודה נמוכים יותר יהיו בעלי רעש גבוהה יותר. בעבודות הקודמות אין התייחסות שונה לערכי הגשם בקווים השונים כפונקציה של התדר ואורך הקו ובטח לא התייחסות שונה במובן האופטימלי כפי שהוא אכן משפיע על המדידות.

## 2 שערוד- המודל הבסיסי

בפרק זה נתייחס למקרה הפרטי בו השדה הפרמטרי ופונקציות החישה של הסנסורים ליניאריים. מטרת פרק זה לספק הבנה ואינטואיציה על חשיבות ההתייחסות לפעולת הקוונטיזציה בשערוד. למעשה בפרק זה אנו מבודדים את פעולת הקוונטיזציה, ובוחנים את ההבדלים בין משערך ה-ML המתייחס לפעולת הקוונטיזציה לבין משערך ה-NML אשר מזניח פעולה זו. נרצה להבין את פעולת המשערכים השונים דרך התבוננות בפונקציות המחיר השונות שלהן. מתוך הבדלי פונקציית המחיר נוכל לנתח מקרים, ללא צורך בביצוע סימולציה, בהם פעולת השערוד תוליד תוצאות שונות או שוות. הן רמת סיבוכיות החישוב והן רמת הביצועים יהיו שונים עבור שני המשערכים הנ"ל, נציע שני משערכים נוספים אשר יהוו אלטרנטיבת ביניים, הראשון משערך- Taylor והשני משערך Linear. משערכים אלו יהיו קלים יותר לחישוב ממשערך ה-ML ובעלי ביצועים טובים יותר ממשערך ה-NML. לבסוף נציג את ביצועי המשערכים השונים כפי שנבחנו בסימולציה.

### 2.1 דיון במשערכים

בעולם שערוד הפרמטרים ניתן למצוא דרכים רבות לשערוד, אך לא ניתן לקבוע באופן כללי איזה משערך טוב יותר במובן הכללי. על מנת לנתח את ביצועי המשערכים נדרש לקבוע קריטריון מושכל התואם את צרכי היישום שאותם הפרמטרים באים לשרת. קריטריון מקובל ונפוץ הוא קריטריון השגיאה הריבועית הממוצעת כלומר:

: Mean Square Error (MSE)

$$(2.1) \quad mse = E((\hat{\theta} - \theta)^2) = var(\hat{\theta}) + E^2((\hat{\theta} - \theta))$$

כאשר  $\hat{\theta}$  הוא המשערך,  $\theta$  הוא הערך האמיתי  $E(x)$  זו פעולת התוחלת ו  $var(x)$  זו פעולת השונות. ניתן לראות כי ישנם שני גורמים המשפיעים על ה-MSE, השונות של המשערך וההטיה שלו. בניגוד לגישה הביסיאנית, לא ניתן למצוא משערך כללי שיביא את (2.1) למינימום, זאת מכיוון שהפרמטר עצמו הוא אינו משתנה אקראי ועל כן פעולת התוחלת אינה פועלת עליו, כלומר נקבל כי ה-MSE למעשה תלוי בערך  $\theta$  עצמו. אחת הגישות המקובלות היא לחפש את המשערך הטוב ביותר מתוך קבוצת המשערכים שאינם מוטים (minimum variance unbiased) כלומר מתוך משפחה המשערכים בהם  $E(\hat{\theta} - \theta) = 0$  ברור כי אין זה מבטיח שלמשערך זה יהיה את ה-MSE הנמוך ביותר מכיוון שייתכן ושישנו משערך מוטה בעל שונות קטנה יותר, כך שסה"כ ה-MSE של משערך מוטה זה יהיה קטן יותר מכל משערך בלתי מוטה.

נראה כי במודל הבסיסי הלינארי לא סביר למצוא משערך חסר הטיה מכיוון שהטיית המדידות תלויה בערך הפרמטר עצמו. נגדיר את הטיית מדידה באופן הבא:  $E(z - \theta)$ , כאשר  $z$  היינו המדידה ו- $\theta$  הינו ערך הפרמטר האמיתי אותו נרצה לשערך. ראשית, ע"מ לחשב את הטיית המדידה נחשב את פונקציה הסבירות שלה. כפי שראינו בפרק הקודם במשוואה (1.5) פעולת הקוונטיזציה מעבירה משתנה מהעולם הרציף לעולם הבדיד. נציג את פונקציית הסבירות של המדידה  $z_i$  במשוואה (2.2).

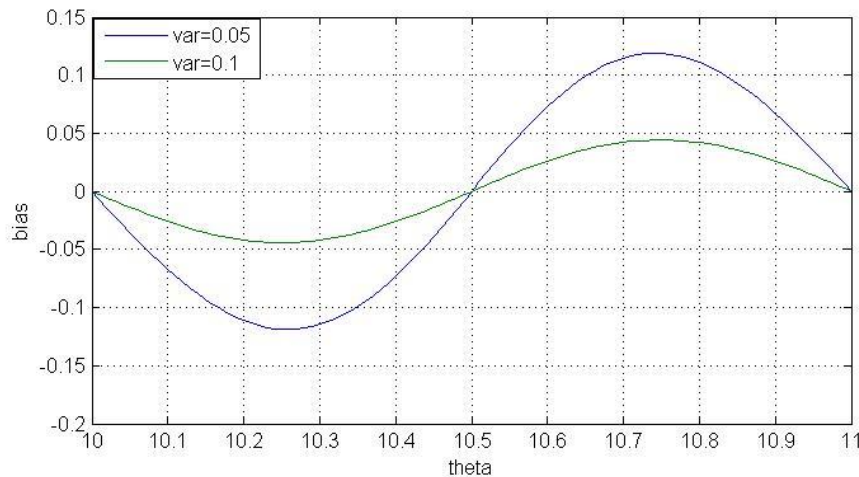
$$P(z_i; \theta) = P\left(y \in \left[z_i - \frac{\Delta_i}{2}, z_i + \frac{\Delta_i}{2}\right]; \theta\right)$$

$$(2.2) \quad P\left(y \in \left[z_i - \frac{\Delta_i}{2}, z_i + \frac{\Delta_i}{2}\right]; \theta\right) = \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} f_N(y; \theta) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} e^{-\frac{(y-\theta)^2}{2\sigma_i^2}} dy$$

מכיוון שהרעשים בלתי תלויים ההסתברות של וקטור המדידות:  $P(\mathbf{z}; \theta) = \prod_1^N P(z_i; \theta)$

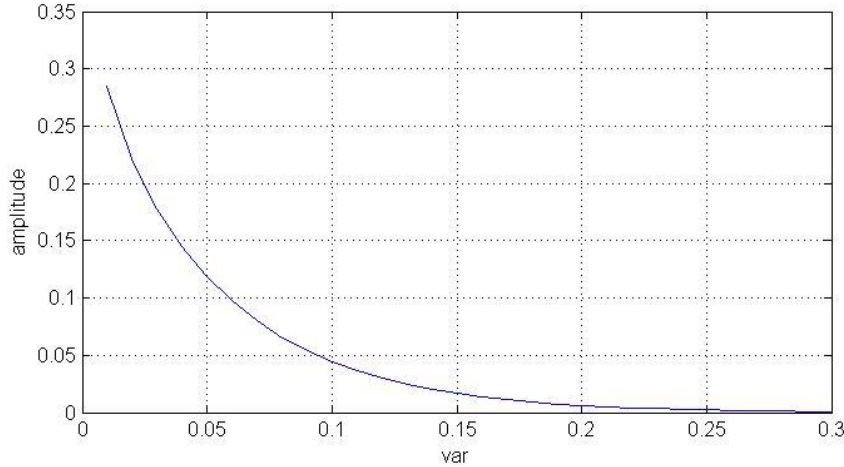
כעת אנו מוכנים לחשב את התוחלת של המשתנה הברידי  $E(z_i) = \sum_{z \in Z} z \cdot P(z_i; \theta)$ , כאשר  $Z$  הוא סט הערכים הברידיים שהמשתנה  $z$  יכול להיות בו. לדוגמה אם הקונטינר הוא עם  $\Delta_i = 1$  אזי  $Z$  הינו קבוצת המספרים השלמים. באיור 2.1 מחושבת הטיית המדידה ביחס לפרמטר  $bias = E(z_i) - \theta$  ניתן לראות בברור כי ההטיה תלויה בערך הפרמטר  $\theta$ . מכיוון שכל משעריך עושה שימוש במדידות כחלק מפעולת השערוך, לא סביר שנמצא משעריך חסר הטיה. לו היה משעריך חסר הטיה הוא היה צריך להכיל גורם פיצוי להטיית המדידות, אך הטיה זו תלוי בערך הפרמטר  $\theta$  שאינו ידוע.

בנוסף ניתן להתרשם מהצורה המחזורית של ההטיה, ההסבר לצורה זו היא העובדה כי פעולת הקוונטיזציה מעגלת לערך השלם הקרוב ביותר, ניתן לראות הטיה מובהקת לערכים השלמים.



איור 2.1 הטיית המדידה  $bias(\theta) = E(z_i) - \theta$  כפונקציה של ערך הפרמטר  $\theta$  עבור שוניות רעש  $\sigma_i^2 = 0.1, 0.05$ , רזולוציית קוונטיזציה  $\Delta = 1$

מתוך איור 2.2 ניתן לראות כי אמפליטודת ההטיה תלויה בשונות רעש המדידה -  $\sigma_i^2$ , והולכת וקטנה ככל שרעש המדידה  $\sigma_i^2$  עולה.



איור 2.2 אמפליטודת ההטיה המחזורית כפונקציה של שונות רעש המדידה  $\sigma_i^2$ . רזולוציית קוונטיזציה  $\Delta = 1$

כעת נציג משערך בעל תכונות אופטימליות עבור מספר גדול של מדידות משערך זה היינו משערך ה- maximum likelihood (ML) משערך זה, כאשר הוא יעיל, חסר הטיה ומשיג את חסם קמר ראו, וכאשר אינו יעיל הוא חסר הטיה ומשיג את החסם "באופן אסימפוטתי" (עבור מספר גדול של מדידות). במקרים אלו, משערך ה- ML משיג ה- MSE הקטן ביותר מבין המשערכים חסרי ההטיה. משערך ה- ML מוצא את הפרמטר שמביא את פונקציית הנראות של המדידות למקסימום כלומר:

$$L(\mathbf{z}; \theta) = \log(P(\mathbf{z}; \theta)): \hat{\theta}_{ml} = \arg \max_{\theta} L(\mathbf{z}; \theta)$$

כאשר:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{z}; \theta) &= \log\left(\prod_{i=1}^N P(z_i; \theta)\right) = \sum_{i=1}^N \log(P(z_i; \theta)) = \sum_{i=1}^N \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \int_{z_i-\frac{\Delta_i}{2}}^{z_i+\frac{\Delta_i}{2}} e^{-\frac{(y-\theta)^2}{2\sigma_i^2}} dy\right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \log(2\pi\sigma_i^2) + \sum_{i=1}^N \log\left(\int_{z_i-\frac{\Delta_i}{2}}^{z_i+\frac{\Delta_i}{2}} e^{-\frac{(y-\theta)^2}{2\sigma_i^2}} dy\right) \end{aligned}$$

כעת נציג את המשערך שמביא את פונקציית הנראות למקסימום:

$$(2.3) \quad \hat{\theta}_{ml} = \arg \max_{\theta} \sum_{i=1}^N \log\left(\int_{z_i-\frac{\Delta_i}{2}}^{z_i+\frac{\Delta_i}{2}} e^{-\frac{(y-\theta)^2}{2\sigma_i^2}} dy\right)$$

כעת נציג את נגזרת פונקציית הסבירות כפי שחישבנו בנספח א'.

$$(2.4) \quad \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^N \frac{\int_{z_i-\frac{\Delta_i}{2}}^{z_i+\frac{\Delta_i}{2}} y \cdot f_N(y; \theta) dy}{\int_{z_i-\frac{\Delta_i}{2}}^{z_i+\frac{\Delta_i}{2}} f_N(y; \theta) dy}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}\right)^{-1} - \theta$$

כאשר  $f_N(y; \theta) = N(\theta, \sigma_i^2)$  היא פונקציית פילוג גאוסית עם תוחלת  $\theta$  ושונות  $\sigma_i^2$ . נציין כי ניתן למצוא משעריך יעיל אם ורק אם ניתן להגיע לביטוי נגזרת פונקציית הנראות באופן הבא [36]:

$$(2.5) \quad \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = I(\theta) \cdot (g(z) - \theta)$$

כאשר  $I(\theta)$  היינה פונקציה התלויה רק בפרמטר ואינו תלוי במדידות, ו $g(z)$  תלויה רק בווקטור המדידות ואינו תלוי בפרמטר. מתוך (2.4) ניתן לראות שלא קיים משעריך יעיל, מכיוון שלא ניתן למצוא פונקציה התלוי רק במדידות ולהביא את ביטוי הנגזרת לביטוי הנדרש, הסיבה היא שלא ניתן לנתק בין המדידות שקובעות את תחומי האינטגרציה של פונקציית הצפיפות לבין הפרמטר שקובע את התוחלת שלה, שני הגורמים הנ"ל משפיעים יחדיו על פונקציית הנראות וכן על הנגזרת שלה. מכיוון שאין משעריך יעיל לבעיה, למעשה לא קיים משעריך חסר הטיה המשיג את חסם קרמר-ראו עבור כמות סופית של מדידות. בנוסף לא ניתן לתאר את משעריך ה-ML כפונקציה מפורשת של המדידות מסיבה זו, ולכן על מנת למצוא את  $\hat{\theta}_{ml}$  נצטרך למצוא פרמטר  $\theta$  המקיים את המשוואה (2.3). ניתן בשיטות שונות למצוא את פרמטר זה כפי שמוצאים נקודת מקסימום גלובלי לפונקציה, ישנן שיטות נומריות איטרטיביות לשם כך. נרצה לבדוק משערכים נוספים פשוטים יותר אשר ניתנים לכתובה באופן מפורש כפונקציה של המדידות.

ראשית נבחן צורה נאיבית להסתכל על הבעיה, תוך הזנחת הקוונטיזציה:

$$(2.6) \quad z_i \cong \theta + n_i$$

כעת נציג את משעריך ה-ML עבור המודל הנאיבי:

$$(2.7) \quad L_{Naive}(\mathbf{z}; \theta) = \sum_{i=1}^N -\frac{1}{2} \log(2\pi\sigma_i^2) - \frac{(z_i - \theta)^2}{2\sigma_i^2}$$

$$(2.8) \quad \hat{\theta}_{nml} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \sum_{i=1}^N \frac{-(z_i - \theta)^2}{2\sigma_i^2}$$

$$(2.9) \quad \frac{\partial L_{Naive}(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} = \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^N \frac{z_i}{\sigma_i^2} \right) - \theta$$

מתוך משוואה (2.9) ניתן לראות שהיא מקיימת את המבנה הנדרש במשוואה (2.5), כאשר  $g(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^N \frac{\frac{z_i}{\sigma_i^2}}{\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}\right)}$  ו-

$I(\theta) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}$  ולכן עבור המודל הנאיבי קיים משעריך יעיל, אך כפי שציינו מודל זה אינו מתאר נאמנה את הקשר בין הפרמטר למדידה מכיוון שהוא מזניח את פעולת הקוונטיזציה.

$$(2.10) \quad \hat{\theta}_{nml} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{z_i}{\sigma_i^2}$$

נקרא למשעריך המוצג ב (2.10) Naïve Maximum Likelihood (NML) למודל הבסיסי, מכיוון שהוא מזניח את הקוונטיזציה ולכן יהיה קרוב למשעריך ה-ML רק אם אכן פעולת הקוונטיזציה זניחה. כפי שצינו משעריך זה היינו יעיל רק עבור המודל הנאיבי (2.6) משעריך זה יעיל, אך כמובן זו רק הסתכלות נאיבית על המודל, ואינו יעיל עבור המודל הבסיסי כפי הוגדר ב- (1.5).

הצגנו שתי גישות, האחת מתייחסת לפעולת הקוונטיזציה כפי שעושה משעריך ה-ML, והשנייה מתעלמת מפעולה זו כפי שעושה משעריך ה-NML, ברור כי עבור תנאים מסוימים גישות אלו יתלכדו, לדוגמה כאשר רזולוציית הקוונטיזציה תהיה "טובה מספיק", נרצה לשאול מה הם התנאים? באופן אינטואיטיבי ברור כי אם הקוונטיזציה תעשה ברזולוציה גבוהה למשל ביחס לשונות רעש מדידה אזי ניתן בקרוב להסתכל על המדידה הבדידה כמדידה רציפה ולהזניח את פעולת הקוונטיזציה. לשם כך נראה כי ניתן לקבל את משעריך ה-NML מתוך משעריך ה-ML תחת הנחה זו.

הנחה זו למעשה אומרת כי שונות רעש המדידה  $\sigma_i^2$  גדולה ביחס לרזולוציית הקוונטיזציה  $\Delta_i$ , או במילים אחרות שפונקציית הצפיפות של המשתנה הרציף  $y = \theta + n_i$  בקרוב קבועה לאורך מקטעי הקוונטיזציה כלומר:

$$f_N\left(y \in \left[z_i - \frac{\Delta_i}{2}, z_i + \frac{\Delta_i}{2}\right]; \theta\right) = \text{const}_i \quad \forall i$$

$$(2.11) \quad \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} y \cdot f_N(y; \theta) dy = \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} y \cdot \text{const}_i dy = \Delta_i \cdot z_i \cdot \text{const}_i$$

$$(2.12) \quad \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} f_N(y; \theta) dy = \text{const}_i \cdot \Delta_i$$

אם נציב (2.11) ו (2.12) ב (2.4) נקבל:

$$(2.13) \quad \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = \left(\sum_{i=1}^N \frac{-1}{\sigma_i^2}\right) \cdot \left(\theta - \frac{\sum_{i=1}^N \frac{z_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}\right)$$

אם נשווה את (2.13) לאפס על מנת לקבל את פונקציית המקסימום נקבל:

$$(2.14) \quad \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{z_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}}$$

נשים לב שזה שמשוואה (2.14) שקולה ל(2.10). כלומר הראנו שההנחה הנאיבית שפעולת הקוונטיזציה זניחה מתקיימת במידה ורזולוציית הקוונטיזציה  $\Delta_i$  גבוהה ביחס שונות רעש המדידה  $\sigma_i^2$  כאשר בקרוב טוב פונקציית הצפיפות נשאר קבועה לאורך מקטעי הקוונטיזציה, בתת הפרק 2.2 נעמיק את הבנה זו ואף ננסה לכמת את התנאים בהם הנחה זו מתקיים.

מצד אחד קיבלנו משערך לינארי פשוט ביותר לחישוב, נרצה להשוות את הביצועים שלו אל מול משערך ה-ML. אנו מצפים שעבור פשטות החישוב נאלץ "לשלם" בביצועים.

## 2.2 השוואה תיאורטית בין משערכי ה-ML ל NML

בחלק זה נשאל האם אכן הביצועים של משערך ה-ML טובים יותר מביצועי משערך ה-NML, אם כן, באיזה מובן ועבור אלו מקרים. על מנת לענות באופן תיאורטי על שאלה זו נבצע בחלק זה ניתוח מעמיק של ההבדלים בין שני המשערכים. בנוסף מכיוון שאנו יודעים כי אם המדידות לא היו עוברות את פעולת הקוונטיזציה שני המשערכים היו מתלכדים, השאלה הנשאלת היא מה התנאים בהם ניתן לקבוע כי המשערכים "קרובים" מספיק בשביל להשתמש במשערך הלינארי הפשוט, משערך ה-NML.

על מנת לענות על מרבית השאלות נכון יהיה להסתכל על פונקציית המחיר של כל אחד מהמשערכים וללמוד את ההבדלים מתוך השוני בין פונקציות המחיר. נגדיר עבור כל אחד מהמשערכים את פונקציית המחיר כמינוס פונקציית הנראות, כלומר אם המשערכים התקבלו ע"י מקסום פונקציית הנראות הם יתקבלו ע"י מזעור פונקציות המחיר.

ניתן לנסח את פונקציית המחיר ה- NML מתוך (2.8) :

$$(2.15) \quad cost_{nml}(z; \theta) = \sum_{i=1}^N cost_{i nml}(z_i; \theta) = \sum_{i=1}^N \frac{(z_i - \theta)^2}{2\sigma_i^2}$$

ואת פונקציית מחיר ה-ML מתוך (2.3) :

$$(2.16) \quad cost_{ml}(z; \theta) = \sum_{i=1}^N cost_{i ml}(z_i; \theta) = - \sum_{i=1}^N \log \left( \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} f_N(y; \theta) dy \right)$$



נזכר כי כאשר הנחנו שפונקציית צפיפות  $f_N(y; \theta)$  של המשתנה הרציף  $y = \theta + n_i$  קבועה לאורך מקטעי האינטגרציה התלכדו המשערכים. נשים לב כי שהביטוי  $cost_{i ml}(z_i; \theta)$  מכיל את פונקציית הצפיפות של המשתנה הרציף, נרצה להביא את  $cost_{i nml}(z_i; \theta)$  גם כן כביטוי של צפיפות הפילוג של המשתנה הרציף לצורך השוואה. נשים לב כי:

$$f_N(y = z_i; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{(z_i - \theta)^2}{2\sigma_i^2}}$$

ולכן:

$$(2.17) \quad \frac{(z_i - \theta)^2}{2\sigma_i^2} = -\log(f_N(y = z_i; \theta)) - \frac{1}{2} \log(2\pi\sigma_i^2) = cost_{i nml}(z_i; \theta)$$

אם לרגע נתעלם מפעולת הלוג נשים לב כי  $cost_{i ml}(z_i; \theta)$  מתאר את השטח מתחת לגרף פונקציית הצפיפות. על מנת להביא את  $cost_{i nml}(z_i; \theta)$  לצורה שיתאר שטח מתחת לגרף נוסף ונחסר  $\log(\Delta_i)$  למשוואה (2.17) ונקבל:

$$\begin{aligned} cost_{i nml}(z_i; \theta) &= -\log(f_N(y = z_i; \theta)) + \log(\Delta_i) - \log(\Delta_i) - \frac{1}{2} \log(2\pi\sigma_i^2) \\ &= -\frac{1}{2} \log\left(\frac{2\pi\sigma_i^2}{\Delta_i^2}\right) - \log(f_N(y = z_i; \theta) \cdot \Delta_i) \end{aligned}$$

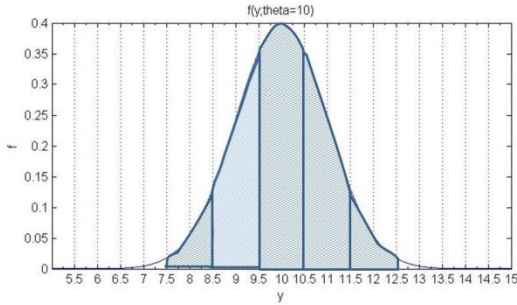
מכיוון שהאיבר הראשון אינו תלוי בפרמטר נרצה להסתכל רק על המחיר שמושפע מהפרמטר נקבל:

$$(2.18) \quad cost_{i nml}(z_i; \theta) = -\log(f_N(y = z_i; \theta) \cdot \Delta_i)$$

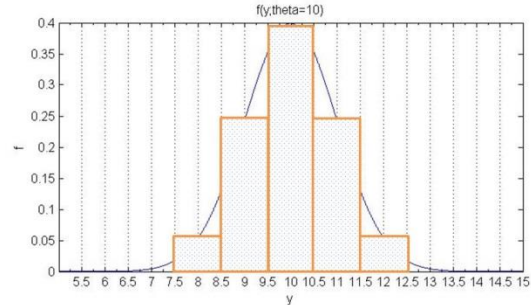
כלומר אם לרגע נתעלם מפונקציית הלוג, נשים לב שההבדל בין פונקציות המחיר עבור מדידה בודדת:  $cost_{i ml}, cost_{i nml}$  זה השטח המחושב מתחת לגרף צפיפות הפילוג  $f_N(y; \theta)$  כאשר הראשונה מחשבת את השטח האמיתי מתחת לגרף והשנייה מחשבת את שטח הריבוע מתחת לגרף כאשר ערך הריבוע הוא הערך של הפונקציה בנקודת המדידה, נמחיש זאת באיור 2.3. ניתן לראות באופן גרפי בתת איור (א) את חישוב שטח של פונקציית הצפיפות כפי שמחושב בפונקציית מחיר ה-  $cost_{i nml}$ , ובתת איור (ב) כפי שמחושב בפונקציית מחיר ה-  $cost_{i ml}$ .

$$\int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} f_N(y; \theta) dy$$

$$f_N(y = z_i; \theta) \cdot \Delta_i$$



(ב)



(א)

איור 2.3 בשני האיוורים מצוירת פונקציית הצפיפות  $f_N(y) = N(\theta = 10, \sigma^2 = 1)$  תת איור (א) מדגים באופן גרפי את חישוב פונקציית המחיר-  $cost_{i\ nml}$ , תת איור (ב) מדגים באופן גרפי את חישוב פונקציית המחיר-  $cost_{i\ ml}$ . עבור  $\Delta = 1$ .

כעת ניתן להסתכל על הפרש פונקציות המחיר:

$$(2.19) \quad cost_{ml}(\mathbf{z}; \theta) - cost_{nml}(\mathbf{z}; \theta) = \sum_{i=1}^N \log\left(\frac{f_N(y = z_i; \theta) \cdot \Delta_i}{\int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} f_N(y; \theta) dy}\right)$$

כלומר מתוך (2.19) אנו מבינים איך התלכדו משערכי ה- ML וה- NML תחת הנחה כי רזולוציית הקוונטיזציה "טובה" מספיק. תחת הנחה זו הפרש השטחים שמתחת לגרף מתאפס. יתרה מכך, כעת אנו יכולים לכמת את ההפרש כתלות ברזולוציית הקוונטיזציה  $\Delta_i$  ושונות רעש המדידה  $\sigma_i^2$ .

לאחר שהבנו את ההבדל בין צורות פונקציות המחיר נרצה להבין איך צורות שונות משפיעות על אופי השערוך ועל ביצועיו. לצורך פישוט, נניח כי הן שונות הרעש והן רזולוציית הקוונטיזציה זהות עבור המדידות. כלומר  $\sigma_i^2 = \sigma^2$ . עבור מקרה פשוט זה יהיה נכון להסתכל על פונקציות המחיר של מדידה בודדות כלומר על:  $\Delta_i = \Delta$ . נשים לב שפונקציות אלו תלויות בערך המדידה ובערך הפרמטר  $\theta$ . דרך גרפית להסתכל על פונקציית המחיר על ידי קיבוע ערך הפרמטר  $\theta = \theta_0$ , שרטוט גרף עבור:  $cost_{i\ ml}(z_i; \theta = \theta_0)$ ,  $cost_{i\ nml}(z_i; \theta = \theta_0)$ . נשים לב שבעוד ש  $z_i$  הוא בדיד בשל פעולת הקוונטיזציה נשרטט את פונקציית המחיר ברציפות, אך נזכור כי ניתן להציב ערכי מדידות בדידות, זאת בשל נוחות הבנת צורת פונקציית המחיר.

באיור 2.4 מוצגות שתי פונקציות המחיר עבור רזולוציית קוונטיזציה גסה  $\Delta_i = 1$  בכל הסנסורים וערך הפרמטר  $\theta = 10$ . ניתן להתרשם שבתרחיש זה יש הבדלים בין פונקציות המחיר.

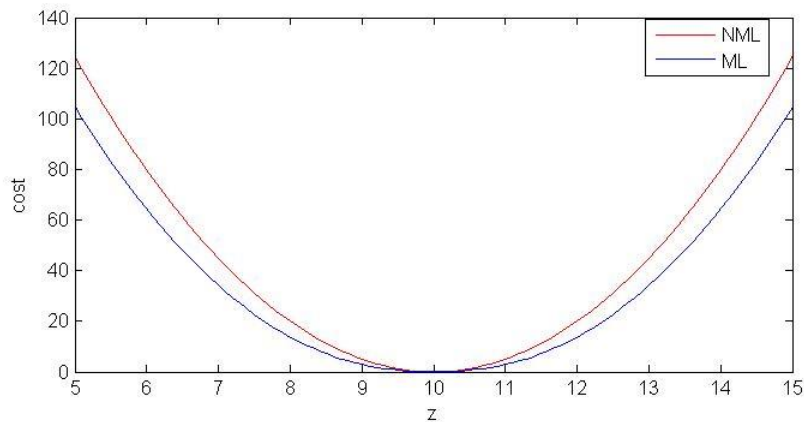
כפי שצינו פונקציית המחיר תלויה בערך הפרמטר, באופן עקרוני עבור כל ערך של פרמטר נצטרך לשרטט גרף חדש, אך נשים לב למעשה כי ההבדל היחידי בגרף עבור ערכי  $\theta$  שונה זה הזאת הגרף על ציר ה-  $X$ , מכיוון שפונקציית המחיר

תיראה בדיוק באותו האופן כאשר היא סימטרית סביב ציר ערך הפרמטר  $\theta$ . דוגמא לכך ניתן לראות באיור 2.5, כאשר פונקציית ה- $cost_{i\ nml}$  מוצגת בתת איור (א) עבור ערך פרמטר  $\theta = 10$ , ועבור תת איור (ב) עבור ערך פרמטר  $\theta = 10.33$ . כלומר הפונקציות זהות עד כדי הזזה על ציר ה- $x$  עבור כל ערך של פרמטר. למעשה זו הסיבה שהתעקשנו על הצגה זו של פונקציית המחיר, כי ניתן באמצעותה להבין את פעולת המשערך באופן גרפי. כלומר ניתן לחשוב על פעולת המשערך באופן הבאה: הצבת ערכי המדידות על גרף בעל פונקציית מחיר עם ערך התחלתי  $\theta = \theta_0$ , חישוב סכום ערכי המחירים עבור כל המדידות שהתקבלו, שינוי ערך הפרמטר  $\theta$  שזה למעשה הזזת הגרף על ציר ה- $x$  סביב הערך החדש וחישוב הסכום מחירי המדידות עבור ערך חדש זה. כך ניתן להמשיך עד מציאת ערך הפרמטר שמביא למינימום את סכום מחירי המדידות. האיורים איור 2.5 ואיור 2.6 ממחישים זאת טוב באמצעות הדוגמא הבאה, נציג וקטור מדידות  $z = Q_{\Delta=1}(10 + n)$  בגודל שלוש מדידות  $N = 3$ . כאשר הקוונטיזציה של כל המדידות היא  $\Delta = 1$  והרעש הגאוסני הוא בעל שונות  $\sigma^2 = 0.1$ . ראליוזציה של שלושת המדידות:  $z_1 = 10, z_2 = 10, z_3 = 1$  נחשב את המשערך ה-NML:

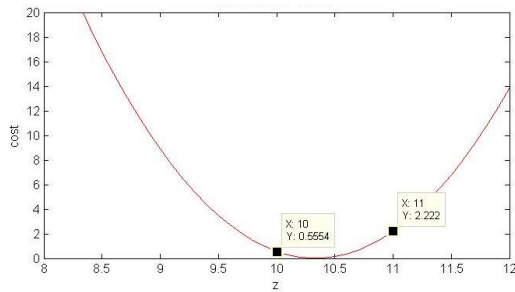
$$\hat{\theta}_{nml} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{z_i}{\sigma_i^2} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{i=1}^N z_i = 10.333$$

נחשב את משערך ה-ML:  $\hat{\theta}_{nml} = 10.37$

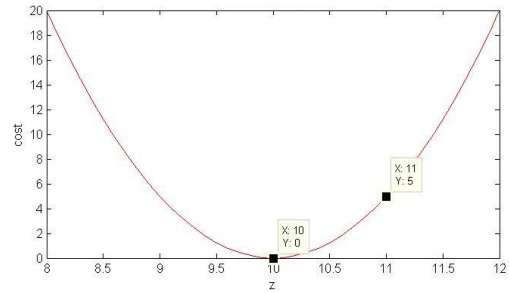
את משערך ה-ML מצאנו את על ידי סריקה של כל ערכי- $\theta$  ומציאת הערך שנותן את המחיר המינימלי בהינתן המדידות הנ"ל. כעת נציג באופן גרפי את פעולת המשערכים דרך פונקציית המחיר, באיור 2.5 נציג שני גרפים של פונקציית המחיר  $cost_{i\ nml}$  עבור ערכי פרמטר  $\theta$  שונים. בתת איור (ב) המחיר נמוך יותר ( $5 > 2 \cdot 0.5554 + 2.222$ ) ולכן הוא הנכון יותר מבין השניים.



איור 2.4 ערכי המחיר השונים:  $cost_{i\ ml}, cost_{i\ nml}$  כפונקציה של המדידה, עבור פרמטר קבוע  $\theta = 10$  ושונות רעש מדידה  $\sigma^2 = 0.1$  ורזולוציית קוונטיזציה  $\Delta = 1$



(ב)

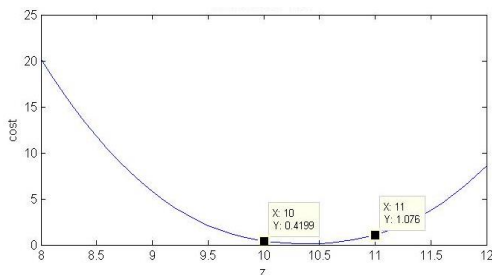


(א)

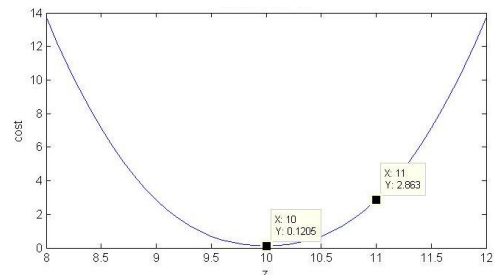
איור 2.5 פונקציות המחיר  $cost_{i\_nml}$  עבור ערכי פרמטר שונים:  $\theta = 10$  עבור תת איור (א),  $\theta = 10.333$  עבור תת איור (ב)

באיור 2.6 נציג שני גרפים של פונקציית המחיר  $cost_{i\_ml}$  עבור ערכי פרמטר  $\theta$  שונים. בתת איור (ב) נמוך יותר  $(5 > 2 \cdot 0.5554 + 2.222)$  ולכן הוא הנכון יותר מבין השניים.

כלומר הראנו בצורה גרפית כיצד משעריך ה-ML נותן תוצאת שערך שונה ממשעריך ה-NML בשל צורת פונקציית המחיר השונה שלו. כעת כשאנו מבינים טוב יותר את הבדלים בין פונקציות המחיר השונות, ואת הקשר בין צורת פונקציית המחיר למשעריך עצמו ננסה להעמיק בהבדלי המשערכים התלויים מצורת מחיר אלו.



(ב)



(א)

איור 2.6 פונקציית המחיר  $cost_{i\_ml}$  עבור ערכי פרמטר שונים:  $\theta = 10$  עבור תת איור (א),  $\theta = 10.37$  עבור תת איור (ב)

נשים לב ששתי פונקציות המחיר סימטריות סביב ערך הפרמטר  $\theta = \theta_0$ , לכן במידה והמדידות שהתקבלו יהיו סימטריות סביב ערך מסוים, הפרמטר שיביא למינימום את פונקציית המחיר זה ערך הסימטריה עצמו. עבור מקרה סימטרי זה לשני המשערכים תהיה אותה התוצאה. לכן על מנת לבחון את ההבדלים בפעולות השערוך נתבונן על המקרים בהם אין סימטריה בווקטור המדידות.

במצב של חוסר סימטריה באופן טבעי ישנן לרוב יותר מדידות הקרובות לערך הממוצע, נקרא להן "הקרובות" וישנן מעט מדידות הרחוקות מערך הממוצע, נקרא להן "הרחוקות". נשים לב כי משעריך ה-NML ייתן תמיד את הערך הממוצע. נרצה לבחון את פעולת משעריך ה-ML בהיבט של עדיפות למדידות "קרובות" או "רחוקות". כלומר בניגוד למשעריך ה-NML, משעריך ה-ML ייתן ערך שונה מערך הממוצע במקרה של חוסר סימטריה. נשים לב באיור 2.4 כי פונקציית מחיר ML שטוחה יותר (כלומר שינוי הנגזרת של הפונקציה איטי יותר) בסביבת הפרמטר ביחס לפונקציית מחיר ה-NML וכאשר מתרחקים מסביבת הפרמטר הפונקציה הולכת ונהיית תלולה יותר ויותר (קצב שינוי הנגזרות גדולות יותר), דבר המרמז כי בשערוך ה-ML בניגוד לשערוך ה-NML לא בהכרח תהיה התייחסות זהה בין המדידות

"הקרובות" למדידות "הרחוקות". כלומר שערך הפרמטר לא יהיה ממוצע פשוט בין המדידות. יתרה מכך, בשל האופי השטוח של פונקציית המחיר בקרבת הפרמטר המשערך יטה יותר לכיוון המדידות ה"רחוקות" מאשר למדידות "הקרובות". זאת מכיוון שאם הגרף יזוז לכיוון המדידות "הרחוקות" המחיר של המדידות "הרחוקות" ירד באופן ניכר יותר מאשר האופן בו מחיר המדידות "הקרובות" יעלה, ולכן המשערך יטה יותר לכיוון המדידות הרחוקות.

נדגים זאת באמצעות הדוגמא לעיל. נגדיר את המדידות  $z_1 = 10, z_2 = 10$  "קרובות", ואת המדידה  $z_3 = 11$  כ"רחוקה". נזכר כי  $\hat{\theta}_{nml} = 10.333$   $\hat{\theta}_{ml} = 10.37$  כלומר, אכן משערך ה-ML נוטה יותר לכיוון מדידה ה"רחוקה" ( $z_3 = 11$ ) מאשר למדידות ה"קרובות" ( $z_1 = 10, z_2 = 10$ ), כלומר עבור הדוגמא הזו ניתן לכתוב את המשערך:

$$\hat{\theta}_{ml} = 10.37 = 10 \cdot 0.315 + 10 \cdot 0.315 + 11 \cdot 0.37$$

כעת, מעבר לאינטואיציה שקיבלנו על הקשר בין ערך המשערך כתלות בצורת פונקציית המחיר, ננסה לכמת אינטואיציה זו דרך הפרמטרים המשפיעים על הצורה של משערך ה-ML שהם רזולוציית הקוונטיזציה  $\Delta_i$  ושונות רעש המדידה  $\sigma_i^2$ .

נשים לב כי האינטואיציה הביאה אותנו להסתכל על השוני בקצב השיפועים בין שתי פונקציית המחיר, כלומר הנגזרת השנייה של הפונקציה (נזכיר כי אנו גוזרים כפונקציה של ערך המדידה  $z$  ולא כפונקציה של הפרמטר  $\theta$ ), מתוך (2.20) ניתן לשים לב כי נגזרת השנייה של פונקציית ה-NML קבועה, בעוד בנייתן לראות ממשואה (2.21) שהנגזרת השנייה של פונקציית מחיר ה-ML תלוי בערך של  $\theta$ . הערה, בעוד שציר ה- $z$  הוא למעשה אינו רציף מכיוון שבשל פעולת הקוונטיזציה רק ערכים בדידים יכולים להתקבל, אך אנו נתייחס לערך זה כרציף בפעולת הגזירה מכיוון שאנו מעוניינים בצורה של פונקציית המחיר, לצורך כך נכון להתייחס לגזירה רציפה על מנת להבין את הצורה הרציפה, כאשר בפועל המחיר יהיה רלוונטי רק עבור אותם ערכי מדידות בדידים.

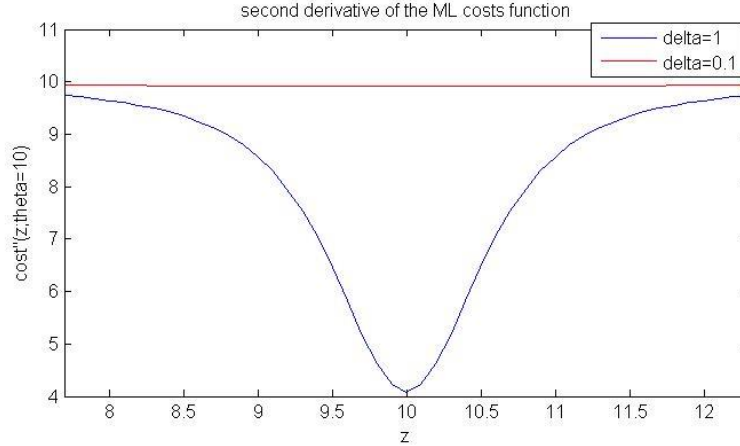
$$(2.20) \quad \frac{\partial^2 \text{cost}_{nml}(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \mathbf{z}^2} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \text{cost}_{i nml}(z = z_i; \theta)}{\partial z^2} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}$$

את הנגזרת השנייה של פונקציית הסבירות נחשב בנספח ב' ונסיק כי:

$$(2.21) \quad \frac{\partial^2 L_i(z_i; \theta)}{\partial z_i^2} = \frac{(A'_1) \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} f_N(y; \theta) dy - (A_1)^2}{\left( \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} f_N(y; \theta) dy \right)^2}$$

כאשר  $A_1, A'_1$  מוגדרים ב- (7.8).  $f_N(y; \theta) = N(\theta, \sigma_i^2)$  הערה: הנגזרות מתייחסת למשתנה  $z_i$  כרציף בתהליך הגזירה.

באיור 2.7 מוצגת הנגזרת השנייה בצורה גרפית עבור שני ערכי קוונטיזציה קבועה  $\Delta = 1$  ובחלו  $\Delta = 0.1$  באדום.



איור 2.7 הנגזרת השנייה של פונקציית המחיר  $cost_{ml}$  כאשר:  $\sigma^2 = 0.1$ ;  $\theta = 10$  כפונקציה של המדידה עבור שני ערכי רזולוציית קוונטיזציה שונה.

ניתן לראות באיור 2.7 כי הנגזרת השנייה של פונקציית המחיר עבור מדידות בעלות  $\Delta = 0.1$  היא, בקרוב טוב קבועה, בעוד שהנגזרת השנייה של פונקציית המחיר עבור מדידות בעלות  $\Delta = 1$  משתנה. נגזרת זו קטנה יותר בקרבת הפרמטר והולכת וגדלה עד שלמעשה נהיית קבועה. אופן הסתכלות זה מרמז כי ניתן להסיק על התנהגות המשערך מתוך התבוננות בצורת הנגזרת השנייה של פונקציית המחיר שלו.

נשאלת השאלה, האם ניתן לכמת את השוני בין פעולת המשערכים? נציע דרך על מנת להעריך האם המשערכים "קרובים מספיק".

נשתמש בכך כי אנו מניחים שהמשערכים קרובים ברמה מסוימת ועל כן ניתן לפתח טור טיילור של פונקציית מחיר ה-ML סביב משערך ה-NML. נפתח טור טיילור מסדר שני, כלומר נקרב את פונקציית הנראות הלא פרבולה, נמצא את ערך המינימום של הפונקציה המקורבת ע"י גזירה והשוואה לאפס.

$$(2.22) \quad L(\theta) \cong L(\hat{\theta}_{nml}) + L'(\hat{\theta}_{nml})(\theta - \hat{\theta}_{nml}) + \frac{1}{2}L''(\hat{\theta}_{nml})(\theta - \hat{\theta}_{nml})^2$$

כאשר  $L' = \frac{\partial L}{\partial \theta}$ ;  $L'' = \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2}$  כעת נגזור לפי  $\theta$  ונשווה לאפס ע"מ למצוא את המשערך שמביא למינימום:

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} \cong L'(\hat{\theta}_{nml}) + L''(\hat{\theta}_{nml})(\theta - \hat{\theta}_{nml}) = 0; \quad \hat{\theta}_{ml} = \hat{\theta}_{nml} - \frac{L'(\hat{\theta}_{nml})}{L''(\hat{\theta}_{nml})}$$

כלומר:

$$(2.23) \quad \hat{\theta}_{ml} \cong \hat{\theta}_{nml} - \frac{L'(\hat{\theta}_{nml})}{L''(\hat{\theta}_{nml})}$$

$$\hat{\theta}_{ml} - \hat{\theta}_{nml} \cong -\frac{L'(\hat{\theta}_{nml})}{L''(\hat{\theta}_{nml})} ML$$

ולכן ההצעה שלנו למדד סביר האם שני המשערכים הם מספיק קרובים הוא המדד הבא:

$$(2.24) \quad M_{cost}(\mathbf{z}; \sigma^2, \Delta) = \frac{L'(\hat{\theta}_{nml})}{L''(\hat{\theta}_{nml})}$$

$$\Delta = [\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N]^t \text{ ו } \sigma^2 = [\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2]^t$$

נשים לב מתוך (2.24) כי  $M_{cost}$  הוא פונקציה של המדידות, רזולוציית הקוונטיזציה ושונויות רעשי המדידות. ניתן עבור אפליקציות שונות להגדיר סף כאשר מתחתיו ניתן להסתפק בביצועי משעריך ה-NML ומעליו נדרש לחשב את משעריך ה-ML בהתאם לרמת הדיוק הנדרשת עבור אותה אפליקציה.

בחרנו להסתכל על ההבדל בין שני המשערכים: האחד מתייחס לפעולת הקוונטיזציה - ML, והשני מזניח פעולה זו - NML, דרך התבוננות בפונקציות המחיר של כל משעריך. הראנו כי ההבדלים של פונקציית המחיר נהיים זניחים ככל שרזולוציית הקוונטיזציה גבוהה ביחס לרעש שונויות המדידה, ולכן תוצרי המשערכים יתלכדו במקרה זה. צורת הסתכלות זו שירתה את עבודתנו אך כמובן שהיא איננה היחידה. ב-[37] מציעים להסתכל על פעולת הקוונטיזציה כפי שמסתכלים על פעולת הדגימה, בעוד שפעולת הדגימה מתבצעת על אות בציר הזמן, פעולת הקוונטיזציה מתבצעת בציר המשרעת. למעשה ניתן להסתכל על פעולת הקוונטיזציה כאילו אנו דוגמים את פונקציית הפילוג של המשתנה האקראי. מתוך צורת הסתכלות זו ניתן להגדיר תנאי המקביל לתנאי נייקויסט [38]. אם נזכר כי תנאי נייקויסט נבע מתוך הרצון לשמר את המידע של האות כפי שמוצג בתדר, כלומר להימנע מחפיפות של פונקציית התמרת פורייה. על האות בייצוגו בתדר (להימנע מחפיפות), עבור פעולת הקוונטיזציה ניתן לגזור את התנאי מתוך הרצון שהמידע על התכונות הסטטיסטיות של המשתנה ישמרו, כלומר להימנע מחפיפות של הפונקציה האופיינית של המשתנה. תנאי זה כפי שמנוסח ב-[37]:  $\phi_x(u) = 0 \text{ for } |u| > \frac{\pi}{\Delta}$ . כאשר  $\phi_x$  היינה הפונקציה האופיינית של המשתנה האקראי x. (כלומר התמרת פורייה של פונקציית הפילוג שלו). הפונקציה האופיינית של משתנה אקראי גאוזי אומנם אינה חסומת סרט, (היא גם כן גאוסית ועל אין סופית) אך ניתן להחשיבה ככזו בשל דעיכת האנרגיה שלה, ב-[37] הציגו את התנאי:  $\sigma > \Delta$  לשמירת המידע הסטטיסטי על משתנה אקראי גאוזי בפעולת הקוונטיזציה. נזכר כי עבור המקרה בו  $\sigma^2 = 0.1$ ;  $\sigma = 0.3162$  תנאי זה מתקיים עבור  $\Delta = 0.1$  ואינו מתקיים עבור  $\Delta = 1$  כפי שהראנו בדרכנו.

כעת כשאנו מבינים את ההשפעה של צורת פונקציית המחיר על התנהגות המשעריך, נרחיב את ההבנה גם עבור שילוב של מדידות בעלות רזולוציית קוונטיזציה שונה. כעת לא נוכל כבעבר להציב את המדידות השונות על אותה פונקציית מחיר, מכיוון שצורת פונקציות המחיר תלויה ברזולוציית הקוונטיזציה ועל כן אנו מסתכלים על סכום של פונקציות מחיר שונות. לצורך פשטות הדיון נניח שתי מדידות בעלות רזולוציית קוונטיזציה שונה:  $\Delta_{0.1} = 0.1, \Delta_1 = 1$ . עבור מקרה פשוט זה נוכל לצייר פונקציית מחיר תלת ממדית שהיא הסכום של שתי פונקציות המחיר השונות, כלומר:

$$(2.25) \quad cost_{ml}(z_1, z_{0.1}; \theta) = cost_{ml 1}(z_1; \theta) + cost_{ml 0.1}(z_{0.1}; \theta)$$

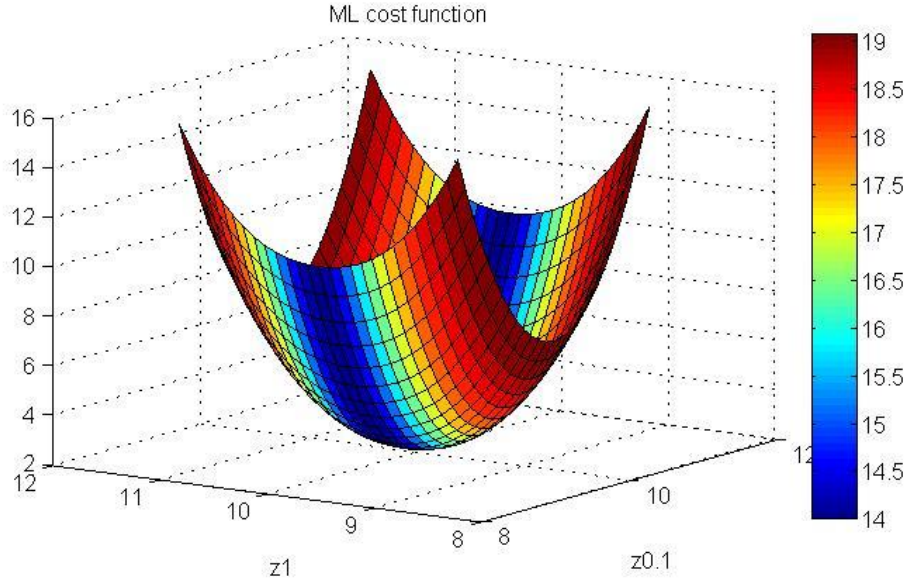
כעת נוכל להציב כל צמד מדידות  $[z_1, z_{0.1}]$  ולקבל מחיר התלוי בערך הפרמטר  $\theta$ , על מנת למצוא את  $\hat{\theta}$  נחפש את נקודת המינימום.

ב- איור 2.8 מצוירת פונקציית המחיר המתוארת ב-(2.25). הצירים באיור זה מוצגים באופן רציף למרות שרק ערכים מסוימים יכולים להיות מוצבים בפונקציה זו. לדוגמא  $z_1$  ניתן להציב רק ערכים שלמים. על מנת לקבל את המחיר של צמד המדידות נציג את המדידה  $z_1$  בציר המסומן ואת המדידה  $z_{0.1}$  בציר  $z_{0.1}$ .

ראשית כפי שעשינו עבור פונקציות המחיר שוות הקוונטיזציה נרצה להבין בצורה גרפית כיצד פועל המשערך. נזכור כי עבור המקרה השווה קוונטיזציה הזזנו את הגרף סביב ערך הפרמטר על ציר ה- $x$ , במקרה התלת מימדי שוב נזיז את הגרף אך הפעם על הציר האלכסוני כאשר  $z_{0.1} = z_1$ . אם שתי המדידות נותנות את אותו הערך ברור כי פונקציית המחיר תזוז על ציר האלכסון עד לפרמטר השווה לערך המדידות, ערך זה ייתן את פונקציית מחיר המינימלית. השאלה מה קורה כאשר המדידות אינן נותנות את אותו הערך לדוגמא  $z_1 = 10$ ;  $z_{0.1} = 10.4$ . השאלה עבור איזה ערך על קו האלכסון  $z_{0.1} = z_1$  יתקבל ערך המינימום, אם נתנתק מהצורה הגרפית ונחשוב באופן אינטואיטיבי נקבל כי הערך צריך להיות קרוב יותר למדידה  $z_{0.1} = 10.4$  מכיוון שמדידה זו מכילה יותר אינפורמציה לגבי הפרמטר מכיוון שהקוונטיזציה שלה ברזולוציה גבוהה ביחס למדידה השנייה. כעת נרצה להגיע לאותה המסקנה מתוך ההסתכלות הגרפית. נזכר כי הגרף יזוז על ציר האלכסון בו  $z_{0.1} = z_1$  ולכן נרצה להבין במידה והמדידות שונות, איפה ממוקם ערך הפרמטר שינתן בו מחיר נמוך יותר, בקרב המדידה  $z_1$  או המדידה  $z_{0.1}$ , נשים לב שמכיוון שבציר  $z_1$  הנגזרת השנייה קטנה (כפי שראינו באיור 2.4, עבור פונקציית מחיר ה-ML ברזולוציית קוונטיזציה של  $\Delta = 1$ ) ולכן השיפועים קטנים סביב ערך הפרמטר ועל סטיית הפרמטר ביחס לערך המדידה יתקבל מחיר נמוך יותר מאשר המחיר שנקבל על סטיית הפרמטר ממדידת ה- $z_{0.1}$ , ולכן הזזת הגרף תעשה יותר לכיוונו של מדידה  $z_{0.1}$ .

באופן יותר רחב, ללא הגבלת כמות מדידות או סוגי הקוונטיזציה, ניתן לצייר  $N_Q$  פונקציות מחיר שונות (כאשר  $N_Q$  זה כמות הקוונטיזציה בעלי רזולוציית קוונטיזציה שונה), בכל פונקציה להציב את כמות המדידות שמשותפות לאותו רזולוציית קוונטיזציה (נניח לרגע כי שונות רעש המדידה שווה בתת קבוצה זו), כעת פעולת המשערך תהיה לבחור את הפרמטר שמביא למינימום את הסכום של כל תוצאות המדידות על פונקציות המחיר השונות, סריקת הפרמטר במקרה זה תעשה במקביל על כל פונקציות המחיר. שוב, פונקציות מחיר בעלות קוונטיזציה גסה יהיו בעלי נגזרת שנייה קטנה יחסית בקרבת הפרמטר ועל כן ערך השערך יטה יותר לכיוון המדידות עם רזולוציית קוונטיזציה הגבוהה.





איור 2.8 ערכי מחיר ה-  $cost_{ml}$  כפונקציה של צמד המדידות  $[z_1, z_{0.1}]$  כאשר  $\theta = 10$ . צבעי הפונקציה הינם ערכי הנגזרת השנייה של הפונקציה עבור שונות רעש מדידה  $\sigma^2 = 0.1$

כפי שהצגנו, משעריך ה- ML הוא סבוך לחישוב אך צפוי לתת ביצועים טובים יותר ממשעריך ה-NML בעוד שהשני קל יותר לחישוב. כעת נציע שני משערכים שהם קלים יותר לחישוב ממשעריך ה- ML וצפויים לתת ביצועים טובים יותר ממשעריך ה-NML.

### 2.3 משעריך טיילור

המשעריך הראשון שנציע הוא למעשה קרוב של משעריך ה-ML. משום שראינו שמשעריך ה-ML מתקבל עבור ערך הפרמטר שמביא את פונקציית הנראות למקסימום נרצה לקרב את פונקציה זו באמצעות טור טיילור סביב נקודת השערוך הנאיבית  $\hat{\theta}_{nml}$  לפרבולה ולמצוא את נק' המקסימום ע"י גזירתה והשוואת הנגזרת לאפס. ערך הפרמטר שיאפס את הנגזרת למעשה יביא את הפונקציה למקסימום ולכן יהיה המשעריך. נקרא למשעריך זה משעריך טיילור (Taylor).

את הפיתוח המלא ביצענו בתת פרק הקודם 2.2 וכפי שניתן לראות מתוך משוואה (2.22) נציג את המשעריך:

$$(2.26) \quad \hat{\theta}_{Taylor} = \hat{\theta}_{nml} - \frac{L'(\hat{\theta}_{nml})}{L''(\hat{\theta}_{nml})} \cong \hat{\theta}_{ml}$$

כאשר  $L' = \frac{\partial L}{\partial \theta}$ ,  $L'' = \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2}$  הם הנגזרת מסדר ראשון ושני בהתאמה של פונקציית הנראות. את משעריך זה ניתן לכתוב באופן מפורש כפונקציה של וקטור המדידות  $z$ , מכיוון ש-  $\hat{\theta}_{nml}$  הוא הממוצע הממושקל של המדידות. משעריך זה פשוט יותר לחישוב מאשר משעריך ה-ML.

## 2.4 משערך לינארי

ראינו כי משערך ה-NML פשוט ביותר לחישוב ולמעשה הוא משערך לינארי למדידות. אם נניח לרגע שלכל המדידות אותה שונות רעש מדידה  $\sigma_i^2 = \sigma^2 \forall i \in [1, 2, \dots, N]$  משערך זה מתייחס לכל המדידות באופן שווה. התייחסות זו למעשה "נאיבית" ואינה לוקחת בחשבון את פעולת הקוונטיזציה, ברור כי מדידות בעלות רזולוציית קוונטיזציה גבוהה מכילות יותר אינפורמציה לגבי הפרמטר מאשר מדידות בעלי רזולוציית קוונטיזציה גסה, נציע משערך לינארי שלוקח בחשבון הן את רעשי המדידות של כל סנסור והן את רזולוציית הקוונטיזציה שלו.

נציע למשקל את המדידות ביחס הופכי לשגיאת השערך שלהם במובן MSE, כלומר להסתכל על כל מדידה של הפרמטר כמשערך שלו, ולחשב את MSE של כל מדידה ולמשקל בהתאם. כלומר  $MSE_i(\theta) = E((\hat{\theta}_i - \theta)^2)$  כאשר  $\hat{\theta}_i = z_i$ . נשים לב שה  $MSE_i(\theta)$  תלוי בערך של  $\theta$  עצמו באופן מחזורי ולכן נציע למצע את ה  $MSE_i(\theta)$  עבור מחזור בודד כאילו ש  $\theta$  היה משתנה אקראי בעל התפלגות אחידה. כלומר:

$$(2.27) \quad \hat{\theta}_{Linear} = \frac{1}{norm} \sum_{k=1}^K W_i z_i ; W_i = \left( \frac{1}{T} \int_T MSE_i(\theta) d\theta \right)^{-1}$$

כאשר T הוא המחזור אשר תלוי ברזולוציית המדידה  $\Delta_i$  ו  $norm = \sum_i W_i \Delta_i$

המשערך הלינארי המופיע ב(2.27) מצד אחד לינארי ופשוט לחישוב ומצד שני לוקח בחשבון גם את פעולת הקוונטיזציה.

## 2.5 סימולציות למודל הפשוט:

בחלק זה נבצע סימולציות מונטה קרלו למודל הפשוט ונחשב את ביצועי המשערכים השונים. נרצה לראות אם הביצועים תואמים את התובנות והאינטואיציה שפיתחנו בחלקים הקודמים. את המשערכים נבחן בקריטריון השגיאה הריבועית הממוצעת בכמה תרחישים: ערכי  $\theta$  שונים, רזולוציות קוונטיזציה שונות  $\Delta_i$ , שונות רעש מדידה שונה  $\sigma^2$  שילוב בין מדידות בעלי קוונטיזציה שונה  $\Delta_i$ . במשוואה (2.28) מוצג חסם תחתון קרמר ראו (CRLB) לשערך הפרמטרי, נזכור כי חסם זה מתאים למשערכים חסרי הטיה. במשוואות(2.29), (2.30) אנו מראים חישוב מפורש של פעולת התוחלת, בראשון עבור החסם ובשני עבור חישוב ה-MSE. חישובים מפורשים אלו ישמשו אותנו בתרחישים בהם ישנו מספר קטן של מדידות ולכן פעולת התוחלת ניתנת לחישוב מפורש. בתרחישים בהם מספר רב של מדידות נעבור לחישוב התוחלת מתוך סימולציות המדידות כפי שמוצג במשוואות (2.31) ו(2.32). עבור כל תרחיש נציין האם החישובים בוצעו באופן "מפורש" או "מסומלץ".

$$(2.28) \quad var(\hat{\theta}) \geq \frac{-1}{E\left(\frac{\partial^2 \ln(P(z; \theta))}{\partial \theta^2}\right)}$$

כאשר  $\hat{\theta}$  הוא משעריך חסר הטייה כל שהוא וחישוב התוחלת מפורט ב(2.29).

$$(2.29) \quad E\left(\frac{\partial^2 \ln(P(\mathbf{z}; \theta))}{\partial \theta^2}\right) = \sum_{z_1 \in Z_1} \sum_{z_2 \in Z_2} \dots \sum_{z_N \in Z_N} \left(\sum_1^N \frac{\partial^2 \ln(P(z_i; \theta))}{\partial \theta^2}\right) \cdot \prod_{i=1}^N P(z_i; \theta)$$

כאשר  $Z_i$  זה התחום בו מדידה  $i$  קיימת.

$$(2.30) \quad MSE(\hat{\theta}) = E\left((\hat{\theta} - \theta)^2\right) = \sum_{z_1 \in Z_1} \sum_{z_2 \in Z_2} \dots \sum_{z_N \in Z_N} (\hat{\theta} - \theta)^2 \cdot \prod_{i=1}^N P(z_i; \theta)$$

$$(2.31) \quad E\left(\frac{\partial^2 \ln(P(\mathbf{z}; \theta))}{\partial \theta^2}\right) \cong \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{\partial^2 \ln(P(z_m; \theta))}{\partial \theta^2}$$

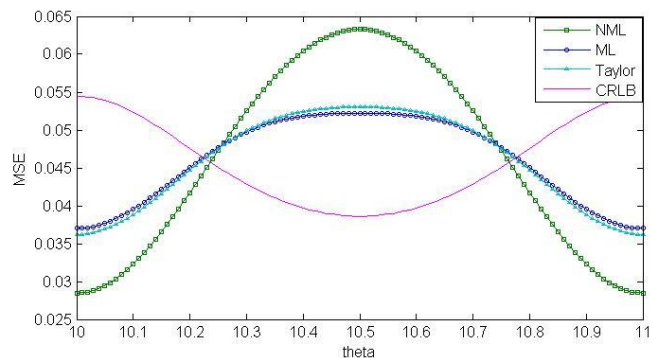
$$(2.32) \quad E\left((\hat{\theta} - \theta)^2\right) \cong \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M (\hat{\theta}_m - \theta)^2$$

אשר כל סימולציה מוגרל וקטור מדידות  $\mathbf{z}$  מתוך המודל וסה"כ מבוצעות  $M$  סימולציות.

### 2.5.1 שילוב מדידות עם רזולוציית קוונטיזציה שווה:

בחלק זה נבחן את תוצאות המשערכים עבור ערכי  $\theta$  שונים, כאשר כל המדידות בעלות קוונטיזציה זהה כלומר  $\Delta_i = \Delta \forall i \in [1, 2, \dots, N]$ . באיור 2.9 מוצגים ה-CRLB וה-MSE עבור שלושת המשערכים השונים- ML, NML, Taylor, עבור תרחיש בו ישנם 4 מדידות שוות שונות רעש מדידה  $\sigma^2$ .

בחלק זה השגיאות והחסם חושבו באופן "מפורש".



איור 2.9 ערכי ה-MSE של המשערכים והחסם כפונקציה של  $\theta$  עבור ארבע מדידות שוות רזולוציית קוונטיזציה ורעש מדידה, כאשר  $\sigma^2 = 0.1$ ,  $\Delta = 1$ .

ניתן להסיק מספר מסקנות מתוך התבוננות באיור 2.9 :

ראשית ניתן לראות כי אין משעריך שהוא "טוב יותר" עבור כל ערכי הפרמטר, כלומר אין משעריך שעבור כל ערך של  $\theta$  מציג שגיאה ריבועית ממוצעת קטנה יותר. ניתן לראות שעבור התחום הקרוב לערך העגול (כלומר 10 ו 11) המשעריך NML טוב יותר מהאחרים, ובתחום בקרבת ערך החצי (10.5) המשערכים ML ו Taylor טובים יותר ממשעריך ה-NML. נתון זה מסתדר עם ההסבר התיאורטי בהבדלים בין המשערכים שהוסבר בתת פרק 2.2.

עוד ניתן לראות כי עבור ערכי פרמטר הקרובים לערך הספרה העגולה ביצועי שלושת המשערכים נמוכים מה-CRLB וכאשר ערכי הפרמטר קרובים לערך החצי ה-CRLB נמוך משלושת המשערכים. ראשית, זאת אינה סתירה מכיוון שחסם זה חוסם את שגיאת השערוך עבור משערכים חסרי הטיה בעוד ששלושת המשערכים מוטים. שנית, ניתן ללמוד מכך כי הטיית המשערכים "עוזרת" לשערוך כאשר הפרמטר בקרבת הערך השלם ביחס למשעריך תיאורטי (אם בכלל קיים) אשר אינו מוטה ומשיג את החסם, הסיבה היא כי המשערכים מוטים לכיוון הערך של הספרה העגולה ולכן שגיאתם נמוכה יותר מהחסם כאשר הפרמטר בסביבה זו וגבוה מהחסם כאשר הערך בקרבת החצי (באזור זה ההטיה סוחפת את המשעריך מערך הפרמטר האמתי). עוד רואים כי המשערים Taylor ו ML קרובים מאוד בשגיאה שלהם.

ראינו כי על מנת לענות איזה משעריך עדיף מבחינת השגיאה הריבועית הממוצעת או צריכים להסתכל על תחומים של הפרמטר, אך באופן מעשי בתהליך השערוך אנחנו לא יודעים את הערך האמיתי. תחת ההנחה כי הפרמטר דטרמניסטי לא ניתן להסיק מעבר למה שהסקנו, אך עבור מגוון רחב של אפליקציות ניתן להניח כי אין עדיפות לערך של פרמטר מסוים על פני אחר, לכן ניתן לרגע לחשוב עליו לראשונה כמשתנה אקראי בעל התפלגות אחידה (דבר זה נעשה למרות שבכל העבודה או מסתכלים עליו כפרמטר דטרמניסטי) ולמעשה למצע את השגיאה על פני מחזור בודד (הרי השגיאה מחזורית). למיצוע זה נקרא Bayesian MSE (BMSE) על שם ההסתכלות הבסיסית על הפרמטר והוא מפורט במשוואה (2.33). מתוך טבלה 2.1 ניתן לראות כי ערך ה-BMSE של המשערכים ה-ML וה-Taylor הם הנמוכים ביותר, ביצועי ה-NML דיי קרובים. יש לזכור כי בתרחיש זה למעשה רזולוציית הקוונטיזציה שווה בין כל המדידות ועל כן הידע הסטטיסטי שמשערכי ה-ML וה-Taylor משתמשים בו לא נותן להם יתרון משמעותי מבחינת ביצועים ממוצעים אל מול המשעריך הנאיבי.

$$(2.33) \quad BMSE = \frac{1}{T} \int_T MSE(\theta) d\theta$$

2.1 טבלה

ערכי ה-BMSE עבור התרחיש המצוין ב- איור 2.9 .

BMSE	
0.0464	NML
0.0460	ML
0.0460	Taylor
0.0459	CRLB

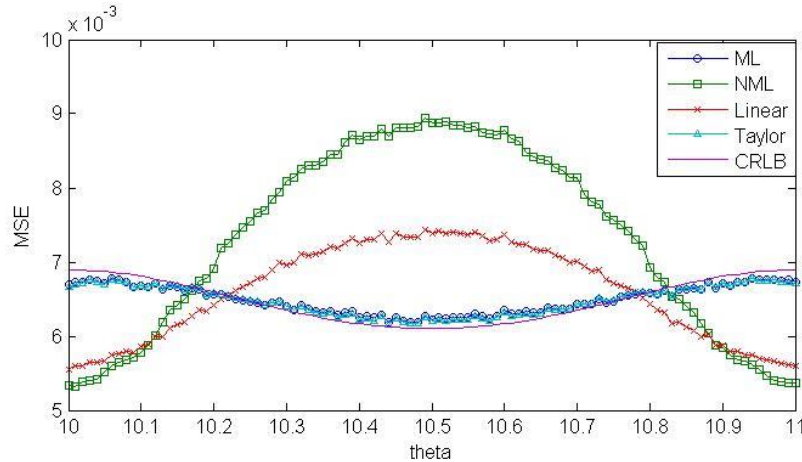
## 2.5.2 שילוב מדידות עם רזולוציית קוונטיזציה שונה :

בחלק זה נרחיב את הסימולציות לתרחישים בהם ישנם מדידות בעלות רזולוציית קוונטיזציה שונה. נניח שני ערכי קוונטיזציה  $\Delta_1 = 1$  ו  $\Delta_{0.1} = 0.1$  וכי שונות רעש המדידה שווה בין כל המדידות  $\sigma_1^2 = \sigma^2$ . בחלק זה אף נסתכל על תרחישים בהם כמות גדולה של מדידות אשר תפורט בתחתית כל איור. בחלק זה חישובי ביצועי המשערכים והחסמים חושבו באופן "מסומלץ".

איור 2.10 דיי דומה בעיקרו לאיור 2.9 , נדגיש את ההבדלים, באיור 2.10 ניתן לראות כי :

- נוסף משעריך ה- Linear וכי ביצועיו משתנים כפונקציה של ערך הפרמטר.
- ביצועי ה-NML מובדלים יותר מביצועי ה- Taylor וה- ML באיור זה.
- ביצועי משעריך ה- Taylor קרובים יותר לביצועי ML מאשר באיור הראשון.

גם בחלק זה נרצה לבחון את הביצועים הממוצעים של המשערכים. בטבלה 2.2 מוצגים ה-BMSE. ניתן לראות כי אכן רואים פערים גדולים יותר ביחס לביצועים הממוצעים של בתרחיש של הקוונטיזציה הזוהה. גם בתרחיש זה משערכי ה- ML וה- Taylor מראים את הביצועים הטובים ביותר ומשעריך ה- Linear גם כן מראה ביצועים דומים. מתרחיש זה אפשר להסיק שההסתכלות ה"נאיבית" של משעריך ה- NML מקנה לו ביצועים פחות טובים ביחס לכל שאר המשערכים אשר מתחשבים בפעולת הקוונטיזציה.



איור 2.10 ערכי ה-MSE של המשערכים והחסם כפונקציה של  $\theta$ . באיור זה 20 מדידות, חצי ברזולוציית קוונטיזציה של  $\Delta_1$  וחצי ב  $\Delta_{0.1}$  כאשר כל המדידות בעלות רעש שונות רעש מדידה זהה  $\sigma^2 = 0.1$ .

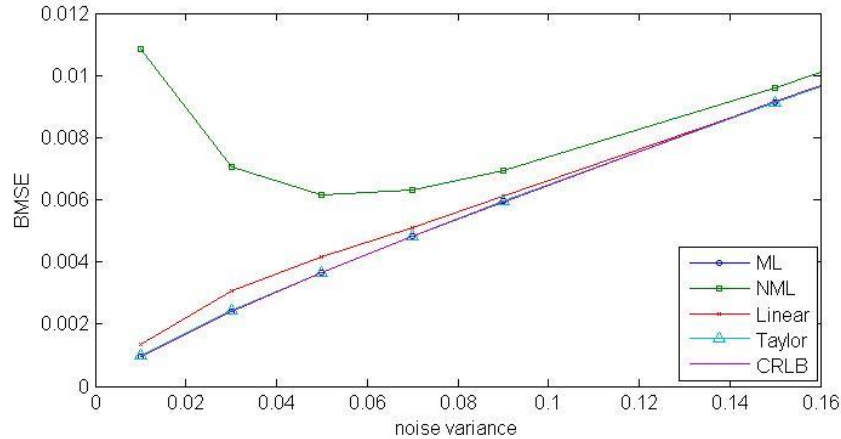
2.2 טבלה

ערכי ה-BMSE עבור התרחיש המתואר ב- איור 2.10

BMSE	
0.0852	NML
0.0806	ML
0.0806	Taylor
0.0812	Linear
0.0805	CRLB

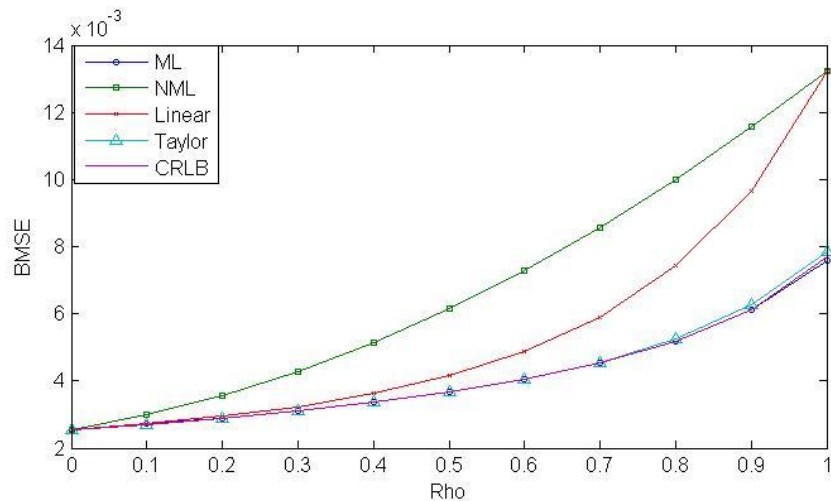
באיור 2.11 מוצגים ה-BMSE והחסם הממוצע כפונקציה של ערכי שונות רעש משתנה  $\sigma^2$ . מספר אבחנות מאיור זה:

- ככל שערך שונות רעש המדידה  $\sigma^2$  קטן יותר מודגשים ההבדלים בין ביצועי המשערכים.
- ביצועי משערכי ה-Taylor וה-ML הם הטובים ביותר ומגיעים לחסם.
- ביצועי משערכי ה-Linear וה-NML מתקרבים לביצועי משערכי ה-ML והחסם הממוצע ככל שערך רעש המדידה  $\sigma^2$  עולה.
- ישנו תחום רעשים  $[\sigma^2 < 0.05]$  בו ביצועי משערכי ה-NML משתפרים ככל ששונות רעש המדידה עולה. תופעה זו אינה אינטואיטיבית. ההסבר לתופעה זו טמון בעובדה כי ה-BMSE של משערכי תלוי בשונות המשערכי ובהטייתו. אומנם שונות המשערכי באופן טבעי עולה ככל שרעש המדידה  $\sigma^2$  עולה, אך ההטייה שלו התלויה בשונות רעש המדידה באופן הפוך, יורדת (כפי שראינו באיור 2.2) באופן דומיננטי יותר.

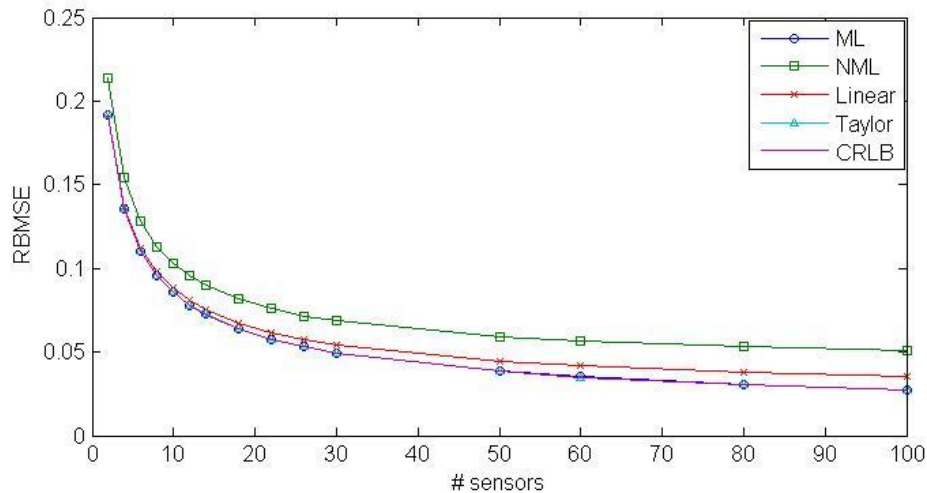


איור 2.11 ערכי ה-BMSE של המשערכים והחסם הממוצע כפונקציה של שונות הרעש  $\sigma^2$ . באיור זה 20 מדידות, חצי ברזולוציית קוונטיזציה של  $\Delta_1$  וחצי ב  $\Delta_{0.1}$ .

באיור 2.12 מוצגים ה-BMSE והחסם הממוצע בתמהילים שונים של מדידות בעלות קוונטיזציה שונה. ניתן לראות שכאשר כל המדידות בעלות קוונטיזציה ברזולוציה גבוהה  $\rho_N = 0$  הביצועים של כל המשערכים כמעט זהים, זאת בשל העובדה שבמקרה זה המדידות הן בעלות רזולוציה "טובה". תחת מקרה זה כפי שדנו בתת פרק 2.2, פונקציות המחיר של ML וה-NML כמעט זהות ולכן ביצועי המשערכים כמעט זהים. ככל שיש יותר מדידות בעלות קוונטיזציה גסה (כלומר ככל שעולה  $\rho_N$ ), באופן טבעי ביצועי המשערכים יורדים, ופער הביצועים בין משערכי ה-ML ל-NML עולה. בנוסף ניתן להתרשם כי הפער בין ביצועי המשערך ה-Linear ל-ML גם כן עולה עם  $\rho_N$  וזה מהסיבה שככל ש  $\rho_N$  עולה המשערך הלינארי קרוב יותר למשערך ה-NML אשר ביצועיו מתרחקים כאמור מה-NML. ניתן להסתכל על כך בזווית שונה, עם עליית  $\rho_N$  יותר ויותר מדידות בעלות קוונטיזציה גסה שאינה לינארית ועל כן סביר כי ביצועי המשערך הלינארי יהיו פחות טובים.



איור 2.12 ערכי ה-BMSE של המשערכים והחסם הממוצע עבור תמהיל שונה של מדידות בעלי קוונטיזציה שונה  $\Delta_1/\Delta_{0.1}$ . כאשר  $N_{\Delta_1} \cdot \rho_N = \frac{N_{\Delta_1}}{N}$  היינו כמות המדידות בעלות קוונטיזציה של  $\Delta_1$  ו  $N = 20$  זה סה"כ כמות המדידות. בתרחיש זה שונות רעש  $\sigma^2 = 0.05$ .



איור 2.13 ערכי ה-RBMSE של המשערכים והחסם הממוצע כפונקציה של כמות הסנסורים. באיור חצי מהמידות ברזולוציית קוונטיזציה של  $\Delta_1$  וחצי ב  $\Delta_{0.1}$ . בתרחיש זה שונות רעש  $\sigma^2 = 0.05$ .

באיור 2.13 מוצגים ה-Root BMSE (RBMSE) כאשר  $\text{RBMSE} = \sqrt{\text{BMSE}}$  והחסם הממוצע עבור כמות שונה של מדידות. ניתן לראות שבאופן טבעי ככל שמוסיפים מדידות ביצועי המשערכים עולים, אך ניתן לראות כי השפעה של כמות המדידות על ביצועי המשערכים הולכת וקטנה ככל שכמות המדידות עולה. נסביר זאת אינטואיטיבית על בסיס הבנת משעריך ה-NML. ביצועי משעריך זה מורכבים משונות השערוך ומההטיה שלו. שונות המשעריך יורדת עם עליית כמות המדידות, בעוד שההטיה נשארת קבועה, לכן עבור אין סוף מדידות תישאר רק הטיית המשעריך בריבוע. עבור משעריך ה-ML הטייתו אומנם יורדת ככל שעולה כמות המדידות (הרי אסימפטוטית הוא חסר הטיה), אך ירידה זו מתבצעת באופן מתון יותר ביחס לירידת השונות עבור כמות מדידות קטנה. עוד ניתן להבחין כי הפער בין ביצועי משעריך ה-ML לביצועי משערכי ה-Linear וה-NML גדל עם כמות המדידות וזאת כצפוי בשל ההטיה של משעריך ה-NML. ניתן לראות שבכל תחומי כמות המדידות המוצגת ביצועי RBMSE של משעריך Taylor טובים.

## 2.6 סיכום

בפרק זה בחנו כיצד התייחסות המודל לפעולת הקוונטיזציה משפיעה על פעולת השערוך ועל ביצועיו. הראנו כיצד ניתן להסיק על פעולת השערוך דרך התבוננות בפונקציות המחיר השונות. ראינו שמשעריך ה-ML מעניק חשיבות שונה למדידות כתלות בתרחישים השונים בעוד שמשעריך ה-NML מעניק חשיבות זהה לשלל המדידות. הבדל זה משפיע על תוצאת השערוך וכמובן על ביצועי המשערכים. הצגנו שני משערכי ביניים – Linear, Taylor אשר מתייחסים לפעולת הקוונטיזציה אך לא באופן מיטבי כפי שעושה משעריך ה-ML ועל כן הם קלים יותר לחישוב מחד אך צפויים לביצועים פחותים. בתת פרק הסימולציה הראנו את ביצועי המשערכים למקרה הבסיסי כפי שמוצג במשוואה (1.5). ראינו כי באופן כללי לא ניתן להגדיר איזה משעריך טוב יותר מכיוון שביצועי המשערכים תלויים בערכי  $\theta$ . הצגנו את הגישה הבסייאתית אשר מאפשרת להסתכל על הביצועים הממוצעים והראנו את הביצועים הממוצעים של המשערכים השונים



במגוון תרחישים. במרבית התרחישים הראנו את עדיפות משערך ה-ML במובן הביצועים הממוצעים (BMSE). משערך זה כפי שהצגנו בפרק 2 לא ניתן לחישוב באופן מפורש מתוך וקטור המדידות  $z$ , ועל כן קשה לחישוב. עוד ניתן לראות שבמרבית התרחישים משערך Taylor אשר פשוט יותר לחישוב נותן ביצועים ממוצעים קרובים מאוד לביצועי משערך ה-ML. בעוד שאת משערך זה ניתן לכתוב באופן מפורש כפונקציה של וקטור המדידות  $z$ , הוא עדיין באופן יחסי מסובך לחישוב ואינו לינארי למדידות. משערך ה-Linear הראה ביצועים ממוצעים טובים פחות אך באופן טבעי קל יותר לחישוב. משערך ה-NML הפשוט ביותר לחישוב הראה ביצועים פחותים במרבית התרחישים. באופן כללי עבור אפליקציות שונות ניתן להשתמש באחד מהמשערכים כתלות ביכולות החישוב ודרישות הביצועים ובתרחיש הצפוי.

### 3 שערוד- המודל הכללי

בפרק זה נציג את משערכי ה-ML,NML למודל הכללי, נראה כי ניתן למדל שדה גשם הנדגם באמצעות סנסורים שונים, בניהם קווי תקשורת של חברות סלולר, תחת הנחות המודל הכללי. נבצע סימולציות למודל הגשם הנדגם באמצעות שתי רשתות תקשורת המובדלות ברזולוציית קוונטיזציה של כל רשת והן בתדרי העבודה של קווי התקשורת. נציג את ביצועי המשערכים בשערוד שדה הגשם המסומלץ ונדגיש את נקודות השוני מניתוח המודל הבסיסי.

#### 3.1 דיון במשערכים

בתת פרק זה נציג את המשערכים עבור המודל הכללי כפי שהוצג במשוואה (1.3). מאותם השיקולים ששקלנו עבור המודל הבסיסי נציג את משערך ה-ML בעל התכונות האופטימליות באופן אסימפטוטי.

פונקציית הנראות למודל זה:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{z}; \theta) &= \log \left( \prod_{i=1}^N P(z_i; \theta) \right) = \sum_{i=1}^N \log(P(z_i; \theta)) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} e^{-\frac{(m - s_i(f(x,y;\theta)))^2}{2\sigma_i^2}} dm \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \log(2\pi\sigma_i^2) + \sum_{i=1}^N \log \left( \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} e^{-\frac{(m - s_i(f(x,y;\theta)))^2}{2\sigma_i^2}} dm \right) \end{aligned}$$

כאשר במשוואה (3.1) מוצג משערך ה-ML אשר מביא את פונקציית הנראות למקסימום.

$$(3.1) \quad \hat{\theta}_{ml} = \arg \max_{\theta} \sum_{i=1}^N \log \left( \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} e^{-\frac{(m - s_i(f(x,y;\theta)))^2}{2\sigma_i^2}} dm \right)$$

כאמור  $s_i(f(x,y;\theta))$  היא פונקציית החישה של הסנסור  $i$  עבור השדה  $f(x,y;\theta)$ . עבור המודל הכללי, בדומה למודל הבסיסי, לא ניתן לתאר באופן מפורש את משערך ה-ML כפונקציה של וקטור המדידות  $\mathbf{z}$  ופעולת השיערוד היא סבוכה ומצריכה פתרונות נומרים. במודל הכללי, בניגוד למודל הבסיסי, לרוב גם המשערך הנאיבי ה-NML אינו ניתן לכתובה באופן מפורש כפונקציה של וקטור המדידה  $\mathbf{z}$ , וזאת במידה ושדה  $f(x,y;\theta)$  ו/או של פונקציית החישה  $s_i(f(x,y;\theta))$  אינם לינארים. במשוואה (3.3) מוצג המשערך הנאיבי למודל הכללי שהוא משערך ה-ML עבור המודל המתואר במשוואה (3.2).

$$(3.2) \quad \bar{z}_i \cong y_i = s_i(f(x,y;\theta)) + n_i$$

$$(3.3) \quad \hat{\theta}_{nml} = \arg \min_{\theta} \sum_{i=1}^N \left( \frac{z_i - s_i(f(x, y; \theta))}{2\sigma_i^2} \right)^2$$

כפי שעבדנו במודל הבסיסי נגדיר את פונקציית המחיר של המשערכים, כך שווקטור הפרמטרים המשוערך יהיה זה שיביא את פונקציית מחירו למינימום ולכן :

$$(3.4) \quad cost_{nml} = \sum_{i=1}^N \frac{(z_i - s_i(f(x, y; \theta)))^2}{2\sigma_i^2}$$

$$(3.5) \quad cost_{ml} = - \sum_{i=1}^N \log \left( \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} e^{-\frac{(m - s_i(f(x, y; \theta)))^2}{2\sigma_i^2}} dm \right)$$

על מנת למצוא את משערכי ה-ML ו-NML מתוך משוואות (3.1) ו-(3.3). נדרש למצוא את המינימום הגלובלי של פונקציות המחיר של כל משערכ.

בעבודה זו לא נעסוק בדרכים למציאת מינימום גלובלי לפונקציה, נציע שתי דרכים מקובלות מבין רבות: גזירת הפונקציה לפי כל אחד מהפרמטרים ומציאת הפרמטרים המביאים את הנגזרת לאפס ע"י Newton-Raphson Iteration, דרך נוספת שאינה משתמשת בנגזרות היא שיטת Nelder-Mead, כפי שמתואר ב [39]. כמובן שכל אחת מהשיטות תמצא את וקטור המינימום הלוקלי. ע"מ למצוא את המינימום הגלובלי נדרש ל"נחש" וקטור התחלה קרוב לערך זה במובן שאין בסביבתו שום ערך לוקלי אחר. ברור כי על מנת למצוא ערך התחלתי קרוב לנקודת המינימום הגלובלי נדרש לבצע סריקה רחבה של מרחב וקטור הפרמטרים. בעבודתנו סרקנו כ- מליון וקטורים אפשריים ובדקנו את ערך הפונקציה, בחרנו את קומץ הערכים (כ- עשרות) הנמוכים ביותר והגדרנו אותם כוקטורי ההתחלה עבור החיפוש הלוקלי. את החיפוש הלוקלים עשינו בשיטת Nelder-Mead, כל חיפוש לוקלי הוליד וקטור לוקלי עם מחיר לוקלי. מתוך כל הווקטורים בחרנו את הווקטור בעל הערך הנמוך ביותר להיות וקטור המשערכ  $\hat{\theta}$ .

בתת פרק זה הצגנו את השערוך לשדה הפרמטרי דרך שערוך וקטור הפרמטרים  $\theta$ . הנחנו כי אנו יודעים את המודל באופן מדויק, כלומר אנו יודעים כי  $f(x, y; \theta)$  היא הפונקציה אשר מתארת נאמנה את השדה המציאותי, באופן כללי ניתן להרחיב את השערוך בכך שאנו לא יודעים בדיוק את המודל ומחפשים את המודל המתאים ביותר מתוך מספר מודלים אפשריים. באופן מתמטי ניתן לכתוב כי אנו רוצים לבחור את המודל ה-  $f_j(x, y; \theta_j)$  כאשר  $j \in [1, 2, \dots, M]$  הוא אינדקס המודל, ו  $M$  זה סה"כ המודלים הנבחנים והוקטור  $\theta_j$  הוא הוקטור הלא ידוע עבור המודל ה-  $j$ . כעת נוכל לשערך את וקטור  $\theta_j$  עבור כל מודל על פי המשוואות (3.1) ו-(3.3) רק שבמקום  $f(x, y; \theta)$  נציב  $f_j(x, y; \theta_j)$  נבצע

זאת  $M$  פעמים כל פעם עבור מודל אחר ונקבל  $M$  וקטורים שהם המשערכים של  $M$  המודלים האפשריים. כעת נבחר את המודל אשר וקטור המשוערך שלו מפיק את פונקציית המחיר הנמוכה ביותר כלומר:

$$\hat{\theta} = \min_{j \in [1, 2, \dots, M]} (\text{cost}(\mathbf{z}; f_j(x, y; \hat{\theta}_j)))$$

כפי שהצגנו ניתן בקלות להרחיב את העבודה לבחירת מודל אך בעבודה זו מעבר להתייחסות זו לא נעשה זאת. מכיוון שיש לבחון לעומק את ההשלכות בחירת מודל וסדר מודל כאשר כמות הפרמטרים שונה, כולל התייחסות למקרים בהם מתקיים nested model.

### 3.2 מידול ליישום הגשם

בתת פרק זה נראה כיצד ליישם את המודל הכללי על מיפוי שדות גשם אשר סנסורים שונים חשים בשדה. נציג מספר גישות למידול שדה גשם, נבחר את הגישה הפרמטרית, נציג סקירה ספרותית מקיפה עבור מידול שדות גשם בגישה הפרמטרית ונפרט מדוע בחרנו בה לעבודתנו. נציג את המודל הפרמטרי לתיאור שדה הגשם ואת המודל המקשר בין הפרמטרים המגדירים את השדה למדידות המופקות ע"י הסנסורים השונים.

את תהליך המידול נבצע בשני שלבים, שלב ראשון נמדל את שדה הגשם לשדה פרמטרי מרחבי, ובשלב השני נמדל את אופן החישה בו הסנסורים חשים את השדה הפרמטרי.

#### 3.2.1 שלב א' - מידול שדה גשם

גשם הינו שדה מרחבי זמני אשר בכל נקודה במרחב ובזמן ישנו ערך גשם כלומר:  $R = f(x, y, z, t)$  כאשר  $R$  [mm/h] מתאר את ערך הגשם (או למעשה קצב הגשם),  $x, y, z$  מציינים את המיקום במרחב, ו  $t$  מציינ את הזמן.

על מנת לפשט את המודל במהלך כל העבודה נסתכל על נקודה רגעית בזמן, ועל שדה הגשם כפי שהוא פוגש את פני הקרקע, כלומר  $z = 0$ , ולכן למעשה נסתכל על שדה גשם דו ממדי בלבד.

במידול שדה הגשם יש לנו שתי מטרות מרכזיות, מחד נרצה לייצג את השדה באמצעות מודל הפשוט ביותר כך שניתן יהיה לשחזרו באמצעות כמות סבירה של סנסורים וכוח חישוב סביר, ומאידך נרצה ליצור מודל אשר יהיה "קרוב ביותר" (במובן שנגדיר בהמשך) לשדה הגשם האמיתי במגוון רחב של מקומות ותנאי סביבה שונים.

נדגיש בשלב הזה כי עבודתנו אינה באוריינטציה מטרולוגית, כלומר אין לנו שום כוונה להכניס מודליים פיזיקליים של התנהגות שדות גשם או לערוך ניסויים אמפיריים על מנת להסיק שדה כזה או אחר. מטרתנו היא להגדיר שדה באופן כללי מספיק כך שעבודות מטרולוגיות, קיימות ועתידיות, יוכלו להתחבר אל המודל ולהשתמש בכלים ובניתוחים שעבודה זו תציע.

נציג שלוש גישות למידול שדה הגשם כך שניתן יהיה לשחזור/לשערך תחת תנאים מסוימים, נדון בתנאים של כל גישה  
ביתרונות ובחסרונות שלה:

- הגישה הדטרמיניסטית- גישה זו מניחה כי שדה הגשם הוא מרחבי דטרמיניסטי אשר ניתן לייצוג ע"י כמות מצומצמת של מידע (לדוגמא יש לשדה רוחב סרט מרחבי סופי, או שהוא ניתן לדחיסה בשיטות שונות), אשר נדגם על ידי הסנסורים הפזורים במרחב, בגישה זו לא נדרש ידע מקדים על השדה, אך נדרשת עמידה בתנאים מספקים של כמות, פריסה, ואופי החישה של הסנסורים הדוגמים. בגישה זו נוכל לשחזר את השדה באמצעות מדידות הסנסורים בצורות שונות, לדוגמא ע"י פונקציות גרעין שחזור המתאימה לאופי הדגימה, שחזור זה יבוצע באופן מלא וללא שגיאות (דוגמאות של תנאים מספקים: דטרמיניסטיות מדידת השדה כך שרעשי מדידה לא קיימים או קטנים ביותר. תנאים על כמות וצפיפות פריסת הסנסורים), עמידה בתנאים מספקים גוררת כמות סנסורים גדולה ועמידה בדרישות מחמירות של צורת פריסתם. בנוסף גישה זו אינה לוקחת בחשבון את רעשי המדידה והקוונטיזציה שבפועל יכולים להיות בעלי השפעה לא זניחה.
  - הגישה הבסייאנית- ניתן להסתכל על השדה כעל תהליך אקראי ולהניח ידע מקדים על התפלגות הגשם בכל נקודה במרחב (או לפחות להניח ידע על הסטטיסטיקה עד סדר שני) וכן על הקשרים הסטטיסטיים במרחב. בגישה זו ניתן לשערך את השדה גם עם כמות סנסורים קטנה (באופן תאורטי גם ללא סנסורים בכלל) מכיוון ששערוך השדה יהיה שילוב של ידע מקדים, כלומר הידע הסטטיסטי, עם מדידות הסנסורים עצמם. בניגוד לגישה הקודמת השדה ישוחזר עם שגיאות הניתנות להערכה. החיסרון המובנה בגישה זו זה הידע המקדים הרחב שנדרש אשר מצריך למיטב הבנתנו, ניתוח מעמיק של מספר רב של שנים באזור העניין ברזולוציית זמן ומרחב גבוהים.
  - הגישה הפרמטרית- בגישה זו יש להניח ידע המקדים כי קיימת ידיעה לגבי אופי התנהגות השדה באופן שניתן לתארה באמצעות פונקציה דטרמיניסטית בעלת כמות סופית של פרמטרים שאינם יודעים. בגישה זו ניתן לשערך את הפרמטרים בעזרת כלים מתורת השערוך (לדוגמא משערכי ה- ML או ה- NML כפי שהצגנו בתת פרק 3.1). באמצעות שחזור הפרמטרים נוכל לשערך את צורת השדה במרחב. גם בגישה זו, בניגוד לגישה הדטרמיניסטית, יהיו שגיאות בשערוך אשר יהיה ניתן להעריך או לחסום אותם. גישה זו תצריך כמות מדידות גדולה מכמות הפרמטרים שאותם נדרש לשערך. בגישה זו הידע המקדים שנדרש אומנם רחב אך למעשה ניתן יהיה לבדוק שדות פרמטרים שונים וכך למצוא מתוך מגוון רחב של שדות אפשריים את השדה המתאים ביותר.
- הגישה הדטרמיניסטית אינה מתאימה למקרה שלנו מכיוון שהיא לא מאפשרת לקחת בחשבון רעשי מדידה וקוונטיזציה אשר קיימים במציאות וכופה כמות וסידור סנסורים תחת תנאים שלא בהכרח מתקיימים (בעבודתנו אנחנו נוקטים גישה פאסיבית בה אנו משתמשים בסנסורים בעל מיקום וצורת חישה קבועה ולכן לא סביר שנעמוד בתנאי הפריסה ללא יכולת שליטה בגורמים אלו). הגישה הבייסיאנית מצריכה ידע מקדים אמין ומעמיק על אזור החישה, ידע סטטיסטי על פילוג עוצמת הגשם הרגעי כפונקציה של המרחב והזמן. הנחה כי ידע כזה קיים ונגיש מצמצם בעינינו את האפשרות להשתמש במודל שנציע.

בעבודה זו בחרנו את הגישה הפרמטרית, מכיוון שלצרכים שהצגנו קודם היא רחבה מספיק ומצריכה כמות סנסורים סבירה וידע מוקדם סביר. גישה פרמטרית זו מקבלת חיזוק מעבודות רבות אשר בחנו מודלים פרמטריים אפשריים מול שדות גשם כפי שהתקבלו ממכ"מי מזג אוויר לאורך תקופות גשומות ארוכות במקומות שונים בעולם. מגוון רחב של עבודות נעשו בשתי תחומים מרכזיים - תחום ההידרולוגיה אשר שדה הגשם הרגעי קשור באופן הדוק למודלים הידרולוגיים שונים לדוגמה אפליקציית חיזוי שיטפונות. התחום השני הוא התחום ההנדסי בהקשרי רשתות תקשורת מיקרוגל, מספר רב של עבודות עם אוריינטציה הנדסית לצורך תכנון מערכות תקשורת מיקרוגל בתדרים גבוהים אשר מושפעים באופן משמעותי משדה הגשם. ב [5] ו [6] הוצע מודל פרמטרי EXCELL:

$$R(x, y) = R_e e^{-\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}}$$

ב- [5] נבדק המודל מול עבור שדות גשם באירופה שנת 1985 מלווייני מזג אוויר SIRO ו OTS אשר הראו תוצאות טובות. ב- [6] נבדק המודל ה- EXCELL וכן מודל מנוון עם מקדם דעיכה בודד עבור כל אירועי הגשם בצפון איטליה במהלך שנת גשם שלמה ב- 1980 והראה תוצאות טובות בעיקר למודל ה- EXCELL. ב [7] הוצע גם מודל גאוסייני GAUCELL:

$$R(x, y) = R_G e^{-\left(\frac{x^2}{a_G^2} + \frac{y^2}{b_G^2}\right)}$$

עבור חודשי החורף באיטליה למספר שנים והראה התאמה למודל. ב [8] הוצא מודל HYCELL:

$$R(x, y) = \begin{cases} R_G e^{-\left(\frac{x^2}{a_G^2} + \frac{y^2}{b_G^2}\right)} & \text{if } R > R_1 \\ R_E e^{-\sqrt{\left(\frac{x^2}{a_E^2} + \frac{y^2}{b_E^2}\right)}} & \text{if } R_2 < R < R_1 \end{cases}$$

את מודל זה בדקו בשני אזורים באירופה, צרפת וגרמניה עבור חודשי החורף של שנת 1999. כמיליון תאי גשם, מחולקים הן במרחב והן בזמן. מודל HYCELL אף נבחן בישראל ב [9]. בעבודה זו נבחן מודל זה לצרכים הידרולוגיים בצפון הנגב מול תמונת המכ"מ מזג אוויר הממוקם בבן גוריון ונצפתה התאמה טובה למודל זה. ב [10] נבחן המודל הגאוסייני גם כן עבור צרכים הידרולוגיים באריזונה שבארה"ב עבור 13 סופות ונצפתה התאמה טובה למודל. ב [11] הוצע לבצע שערך - ML לפרמטרים עבור שדה גשם פרמטרי. במאמר זה נבדקו כל שדות הפרמטרים הנייל: EXCELL, GAUCELL, HYCELL והוצע שדה פרמטרי חדש: DEXCELL:

$$R(x, y) = \begin{cases} R_1 e^{-\sqrt{\left(\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2}\right)}} & \text{if } R > R_1 \\ R_E e^{-\sqrt{\left(\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2}\right)}} & \text{if } R_2 < R < R_1 \end{cases}$$

עבודה זו בחנה את שדות הגשם במשך ארבע שנים בשטח רבוע של כ- [km<sup>2</sup> 65000 בצפון איטליה. המאמר מראה התאמה טובה יותר של הפונקציות: HYCELL, DEXCELL אך הטבה טובה גם של פונקציית ה- GAUCELL.

כמובן שישנם עבודות נוספות בתחום, כל מאמר מפנה לעוד שפע רחב של עבודות בתחום תאי הגשם והמידול הפרמטרי שלהם.

### 3.2.2 מודל שדה הגשם:

נציג שדה פרמטרי שלדעתנו מתאים למגוון רחב של שדות גשם, נדגיש כי תיאור שדה זה מהווה דוגמא למגוון רחב של שדות גשם עם כמות פרמטרים סבירה, כמובן שניתן לבדוק התאמה של מגוון צורות שדה ולמצוא את השדה המתאים ביותר כפי שהצענו בתת הפרק הקודם.

נשים לב כי כל העבודות שנעשו בעבר עבור מידול שדות גשם [11] - [5] השתמשו בתמונות מכ"מ, תא הגשם בעבודות אלו הוגדר סביב שיא עוצמת הגשם באזורו ולכן בכל המודלים אין התייחסות למיקום השדה מכיוון שעבור מערכת הצירים של כל תא גשם השדה הפרמטרי השיא מתקבל בראשית הצירים. עבור הבעיה שלנו מיקום שיא עוצמת של השדה הוא למעשה חלק מהפרמטרים אותם נרצה לשערך. כלומר נוספו לנו שני פרמטרים של מיקום  $[\mu_x, \mu_y]$ , בנוסף בכל המודלים שהוצעו לנו לא ניתן לתאר צורות שהן אלוכסוניות לצירים, כלומר בכל המודלים ניתן לדיעה בציר ה- x ובציר ה- y בנפרד ללא גורם מקשר. על פי עבודות העבר המודלים ההיברידיים לדוגמא HYCELL מכילים 7 פרמטרים מתאימים ביותר לשדה הגשם, אך אם נרצה לתח את המודל ההיברידי בעבודתנו נעלה את המודל ל 9 פרמטרים בשל המיקום שנדרש לשערך. מסיבה זו נציע את המודל הגאומטרי המכיל שישה פרמטרים לטובת מידול שדות גשם שבכל העבודות הראה התאמה טובה למציאות אם כי לא תמיד מיטבית מבין כל המודלים. נדגיש כי אין עבודה זו טוענת כי זה המודל הפרמטרי הטוב ביותר לבעייתנו, אך בהסתמך על עבודות העבר זהו מודל המתאר נאמנה דיו את שדה הגשם מחד ומתאים עבור המקרה שלנו. נזכיר שכל מודל בעל כמות סבירה של פרמטרים הוא ישיש וניתן להצבה במודל הכללי והוא חלק אינטגרלי מעבודה זו.

נציג שדה פרמטרי גאומטרי מרחבי. שדה פרמטרי גאומטרי מאופיין ע"י שישה פרמטרים:

$$(3.6) \quad f(x, y, \theta) = R \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} \right]}$$

$$\theta = [R, \mu_x, \mu_y, \rho, \sigma_x^2, \sigma_y^2]^T \text{ כאשר}$$

$R$   $[\frac{mm}{h}]$  הוא עוצמת הגשם המרבי במיקום  $[\mu_x [km], \mu_y [km]]$ . קובעים את רוחב

הגאומטרי בציר המתאים  $\rho$  הוא פרמטר ההתאמה בין הצירים וחסר יחידות.

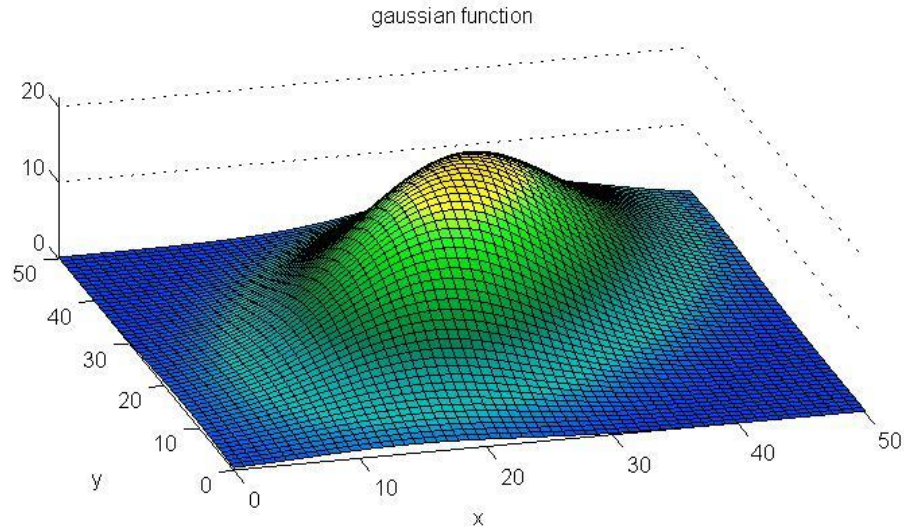
ניתן להתרשם באיור 3.1 מצורה של פונקציה גאומטרי מרחבית, נדגיש כי צורת גאוס זו אינה התפלגות גאוסית אלא צורה דטרמיניסטית אשר ששת הפרמטרים קובעים אותה באופן חד ערכי.

כעת נציג שדה פרמטרי המיוצג על ידי שניים עשר פרמטרים והוא למעשה שילוב של שני גאומטריים.

באיור 3.2 ניתן להתרשם מצורתן של צמד פונקציות גאומטריות מרחביות בעל וקטור הפרמטרים:

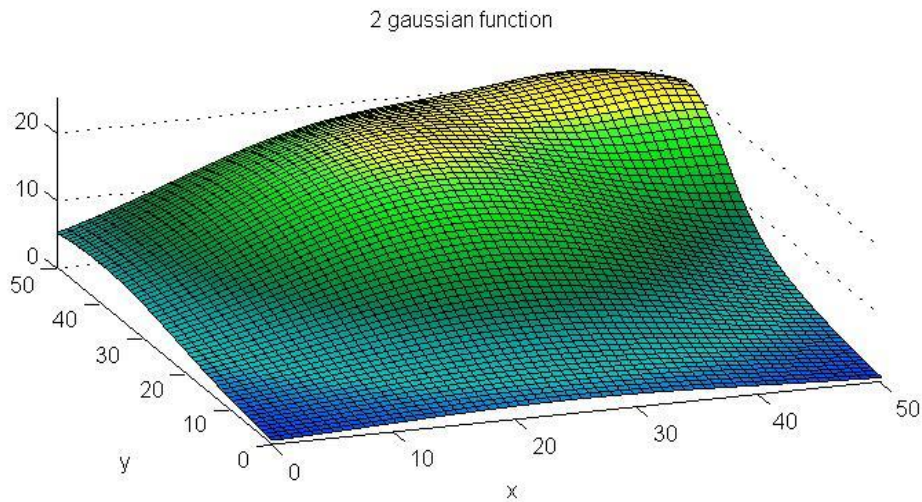
$$\theta = [R_1, \mu_{1x}, \mu_{1y}, \sigma_{1x}^2, \sigma_{1y}^2, \rho_1, R_2, \mu_{2x}, \mu_{2y}, \sigma_{2x}^2, \sigma_{2y}^2, \rho_2]^T$$

ניתן להתרשם שככל שמשתמשים בכמות גדולה יותר של פרמטרים דרגת החופש של תיאור שדה מרחבי עולה.



איור 3.1 פונקציית גאוסין להמחשה, בעלת הפרמטרים:

$$\theta = [R = 20, \mu_x = 26, \mu_y = 29, \rho = 0.5, \sigma_x^2 = 100, \sigma_y^2 = 150]^T$$



איור 3.2 שילוב של שתי פונקציות גאוסיות להמחשה, בעלות הפרמטרים:

$$\theta = \left[ \begin{array}{l} R_1 = 15, \mu_{1x} = 50, \mu_{1y} = 45, \rho_1 = -0.5, \sigma_{1x}^2 = 120, \sigma_{1y}^2 = 90 \\ R_2 = 20, \mu_{2x} = 25, \mu_{2y} = 40, \rho_2 = 0, \sigma_{2x}^2 = 250, \sigma_{2y}^2 = 350 \end{array} \right]^T$$



### 3.2.3 שלב ב': מידול אופי החישה של הסנסורים

כפי שהורחב בהקדמה, שלושה סנסורים מרכזיים חשים שדה גשם: מד גשם, מכ"מ גשם וקווי תקשורת. נראה כי כל סנסור חש את השדה באופן שונה.

#### 3.2.3.1 מידול מדידת מד גשם (rain gauge)

מד גשם למעשה דוגם את השדה במיקומו הגאוגרפי כך שניתן למדל את פונקציית החישה של מד הגשם באופן הבא:

$$(3.7) \quad s_i(f(x, y; \theta)) = \iint f(x, y; \theta) \delta(x - x_i, y - y_i) dx dy$$

כאשר  $[x_i, y_i]$  זה המיקום הגאוגרפי של מד הגשם, כך שלמעשה המודל הכללי המתואר במשוואה (1.3) עבוד מד שדה גשם הופך להיות:

$$(3.8) \quad z_{i\text{rg}} = Q_i(f(x_i, y_i; \theta) + n_i)$$

#### 3.2.3.2 מידול מדידת מד קו תקשורת (microwave link)

כפי שהצגנו בחלק ההקדמה ישנו קשר בין ניחות עוצמת האות העובר בקו התקשורת לבין עוצמת הגשם שעוברת בטווח כפי שמוצג במשוואה (3.9).

$$(3.9) \quad A = aR^b$$

כאשר  $R \left[ \frac{mm}{h} \right]$  הוא עוצמת הגשם.  $a, b$  הינם פונקציה של תדר, טמפרטורה ומאפייני הטיפה האופיינית והם חסרי יחידות.  $A \left[ \frac{dB}{km} \right]$  היינו צפיפות הניחות של עוצמת הסיגנל.

קו התקשורת למעשה חוצה את שדה הגשם לכל אורכו ולכן ניתן להסתכל על ניחות האות בתווך כעל מדידה של שדה הגשם. כך שניתן למעשה לכתוב את פונקציית חישה עבור סנסור קו תקשורת באופן הבא:

$$(3.10) \quad s_i(f(x, y; \theta)) = A_i(\theta) = \int_0^1 a_i \cdot f(\tilde{x}(l; i), \tilde{y}(l; i); \theta)^{b_i} \cdot \gamma_i \cdot dl$$

כאשר  $\gamma_i = \sqrt{(x_{i2} - x_{i1})^2 + (y_{i2} - y_{i1})^2}$ ,  $\tilde{x}(l; i) = x_{i1} + (x_{i2} - x_{i1})l$ ;  $\tilde{y}(l; i) = y_{i1} + (y_{i2} - y_{i1})l$

כאשר  $(x_{i1}, y_{i1})$  זה מיקומו הגאוגרפי של קצה אחד של קו התקשורת ה- $i$  ו  $(x_{i2}, y_{i2})$  זה מיקומו של הקצה השני.

פונקציית החישה של קו התקשורת ממודלת באמצעות אינטגרציה קווית של השדה הפרמטרי, מהקצה הראשון של קו התקשורת אל הקצה השני.

כך שלמעשה המודל הכללי המתואר במשוואה (1.3) עבוד מד שדה גשם הופך להיות:

$$(3.11) \quad z_{i ml} = Q_i(A_i(\theta) + n_i)$$

כאשר  $A_i(\theta)$  מוגדר במשוואה (3.10).

### 3.2.4 הרחבה על ההבדל בין שערך באמצעות מדידת קו תקשורת או מדידת ערך גשם ממוצע

בעבודות קודמות אשר עסקו במיפוי שדה גשם באמצעות רשת תקשורת מסחרית: [33], [34], [17], מיפוי שדות הגשם לא נעשה באופן ישיר ע"י מדידת ערך הניחות של קו התקשורת, אלא נעשה שלב מקדים לטובת עיבוד נתון זה. ראשית חושב ערך הגשם הממוצע על פני אורך הקו עפ"י הקשר ההפוך בין עוצמת הניחות לקצב הגשם כפי שמתואר ב(3.12), שנית ערך ממוצע זה חולק באופן כזה או אחר לנקודות לאורך קו התקשורת. מיפוי שדה הגשם נעשה באמצעות נקודות אלו. בעבודתנו אנו משתמשים בערכי הניחות עצמם כפי שמתואר במשוואות: (3.11), (3.2) ו (3.3) בחלק זה נרצה להרחיב על ההבדלים בין גישה זו (עבודה עם ערכי הניחות ישירות) לגישות עבר (הפיכת ערכי ניחות לערכי גשם) כפי שהוזכר בתת פרק 1.5. כאשר אנו ממירים את ערך הניחות לערך הגשם הממוצע אנו בעצם מציבים את המדידה  $z_i$  במשוואה (3.12). טרנספורמציה זו משנה את רעשי המדידה, לדוגמא אם עבור מדידת ערך הניחות  $z_i$  שונות הרעשים הייתה שווה בין קווי התקשורת השונים כאשר אנו עוברים לערכי גשם שונות הרעש משתנה כתלות בשלושת הפרמטרים  $[a_i, b_i, L_i]$ . ברור שבתדרי עבודה נמוכים כאשר הניחות מושפע פחות מערכי הגשם פעולת הפיכת ערך המדידה הרועשת לערך הגשם הממוצע תגביר את הרעש באופן משמעותי יותר מאשר קו תקשורת העובד בתדרים גבוהים.

$$(3.12) \quad R_i = \left( \frac{z_i}{a_i L_i} \right)^{\frac{1}{b_i}}$$

לצורך ניתוח השפעת הפרמטרים  $[a_i, b_i, L_i]$  על השפעת רעש המדידה כערכי הגשם נכתוב את המדידה כערך הניחות באופן הבא:  $z_i = A_i + \tilde{n}_i$  כאשר נדגיש כי  $\tilde{n}_i$  אינו רעש גאוסי אלא רעש המכיל בתוכו גם את פעולת הקוונטיזציה וניתן להסתכל עליו כמשתנה אקראי  $\tilde{n}_i = z_i - A_i$  והוא כמובן תלוי בערך הניחות עצמו. עוד נשים לב כי רעש זה היינו בעל תוחלת שונה מאפס, נגדיר:  $bias = A_i - E(\tilde{n}_i), var = \tilde{\sigma}^2$  לצורך פשוטות נניח  $b_i = 1$  לכל המדידות, הנחה סבירה עבור תדרי העבודה בהם אנו עובדים ולכן ניתן לכתוב:

$$R_i = \frac{A_i}{a_i L_i} + \frac{\tilde{n}_i}{a_i L_i} = R_{real} + \tilde{\tilde{n}}$$

כאשר  $R_{real}$  הוא הערך הגשם הממוצע האמיתי של שדה הגשם והיה מתקבל לו לא היה רעש מדידה ולא הייתה מבוצעת פעולת הקוונטיזציה.  $\tilde{\tilde{n}}$  הוא למעשה הרעש החדש עבור מדידת הגשם  $R_i$ , נשים לב כי השונות שלו והן ההטיה

שלו השתנו כך ש-  $\tilde{\sigma}^2 = \frac{\tilde{\sigma}^2}{((a_i L_i)^2)}$ ;  $\widetilde{bias} = \frac{bias}{a_i L_i}$ . כלומר קיבלנו כי ההטיות והשונות של ערכי הגשם משתנים

כפונקציה של הפרמטרים  $[a_i, L_i]$ , נזכור כי  $0 < a_i < 1$  וככל שהתדר גבוהה יותר מקדם ה-  $a_i$  גדול יותר, לכן לקווי תקשורת העובדים בתדרים גבוהים יותר ישנם שונות רעש והטיה בערכי הגשם קטנים ביחס לקווים העובדים בתדרים נמוכים מהם. באותו אופן קווי תקשורת ארוכים יותר מספקים מדידות גשם  $R_i$  אמינות יותר מאשר קווי תקשורת קצרים.

לצורך המחשה נשתמש בדוגמא הבאה:

נניח לרגע שתי קווי תקשורת באורך  $L_1 = L_2 = 1$  נמצאים באותו קטע גאוגרפי ועל כן חשים את אותו שדה גשם. לכל אחד מקווי התקשורת תדרי עבודה שונים:  $f_1 = 18$ ;  $f_2 = 24$ . מחישוב קבועי ה- power low של שני הקווים:

$$a_1 = 0.0562, a_2 = 0.1151; b_1 = 1.12, b_2 = 1.1$$

ניתן לראות שמקדם ה-  $a$  קטן בחצי עבור התדר הנמוך ביחס לתדר הגבוהה, אם נניח לרגע ערך גשם של  $R_{real} = 10 [mm/h]$  חישוב הניחות עבור המקדמים הנ"ל-  $A_1 = 0.75$ ;  $A_2 = 1.4514$  כאשר  $A [DB]$  מייצג את ערך הניחות. בוא נניח לרגע שרעש המדידה ופעולת הקוונטיזציה בעלי שונות של:  $\sigma^2 = 0.1$ , יצר הוספה של  $\sigma$  לכל ערך ניחות כך ש:

$$z_1 = A_1 + \sigma = 1.06; z_2 = A_2 + \sigma = 1.76$$

כעת נחשב את ערכי הגשם הממוצעים של כל קו תקשורת עפ"י (3.12).

$$R_1 = 13.6638; R_2 = 11.96$$

שערוך ה- NML עבור ערכי הגשם יהיה פשוט הממוצע הפשוט כלומר  $\hat{R} = \frac{R_1 + R_2}{2} = 12.8$ .

שערוך ה- NML במרחב מדידות הניחות יהיה באופן הבא:

$$\hat{R}_{nml} = \arg \min_R \sum_{i=1}^2 \left( \frac{z_i - a_i R^{b_i}}{2\sigma_i^2} \right)^2 = 12.34$$

כלומר ראינו כי המשערוך שעשה שימוש בערך הניחות באופן אוטומטי נתן משקל גדול יותר למדידה בעלת התדר העבודה הגדול יותר. וכן ניתן לראות כי התוצאה קרובה יותר לערך האמתי. למעשה אם נסתכל על המשקל שקיבלה כל

מדידה בהסתכלות על ערכי הגשם ניתן לראות כי  $\hat{R}_{nml} = 0.223R_1 + 0.777R_2$ .

### 3.3 סימולציות המודל הכללי

בחלק זה נבצע סימולציות מונטה קרלו למודל הכללי ונחשב את ביצועי משערכי ה-ML וה-NML במובן השגיאה הריבועית למודל זה.

נרצה לראות אם הביצועים תואמים את התובנות והאינטואיציה שפיתחנו בחלקים הקודמים והן את תוצאות הסימולציה שראינו עבור המודל הבסיסי. נבחן את ביצועי המשערכים בכמה תרחישים: ערכי  $\theta$  שונים, רזולוציות קוונטיזציה שונות  $\Delta$ , שונות רעש מדידה שונה  $\sigma^2$  שילוב בין מדידות בעלי קוונטיזציה שונה  $\rho_N$ . כאשר  $\rho_N$  היינו היחס בין כמות המדידות בעלות רזולוציית קוונטיזציה של 0.1 לסה"כ המדידות.  $\rho_N = \frac{N_{\Delta=0.1}}{N}$ . זה כמות הסנסורים בעלי רזולוציית קוונטיזציה 0.1 ו-N זה כמות הסנסורים הכוללת, וכן נרצה לבדוק את הביצועים עבור כמות שונה של סנסורים N.

בשל ריבוי האלמנטים הצפויים לשנות את ביצועי המשערכים נגדיר תרחיש נומינלי, כלומר תרחיש אליו נשווה את הביצועים. עבור התרחיש הנומינלי נגדיר סט אלמנטים נומינלי, ונבדוק כיצד כל אלמנט משפיע ביחס לתרחיש זה. בתרחיש הנומינלי נקבע את האלמנטים הנומינליים:  $[\theta^T, N, \rho, \sigma^2]$ . במשוואה (3.13) מפורט הסט הנומינלי.

$$(3.13) \quad [R = 30, \mu_x = 25, \mu_y = 25, \rho = 0, \sigma_x^2 = 70, \sigma_y^2 = 90, N = 24, \rho_N = 0.5, \sigma^2 = 0.1]$$

כאשר  $R[\frac{mm}{h}]$  היינו עוצמת הגשם המקסימלית,  $[\mu_x[km], \mu_y[km]]$  מציין את מרחק מרכז הגאוסין בק"מ מנקודת הרפרנס (נקודת ציון  $P_{ref}$  המוגדרת במשוואה (3.14)).  $\sigma_x^2[km^2], \sigma_y^2[km^2]$  מציינים את רוחב הגאוסין בציר הרלוונטי ו  $\rho$  מייצג את מקדם ההתאמה בין  $\sigma_x^2, \sigma_y^2$ . N מייצג את כמות הסנסורים הכוללת,  $\rho_N$  מייצג את היחס בין כמות הסנסורים בעלי רזולוציית קוונטיזציה של 0.1 לכמות המדידות הכוללת, ו- $\sigma^2$  זה שונות רעש המדידה השווה עבור כל המדידות. המיקום הגאוגרפי של קווי התקשורת בתרחיש הנומינלי מפורטים בנספח ג' בטבלה 7.1.

מול התרחיש הנומינלי שמוצג במשוואה (3.13) נציג תמיד שני תרחישים, תרחיש א' ותרחיש ב', עבור כל סימולציה תרחיש א' ותרחיש ב' יציגו סטיות באלמנט בודד מתוך הסט הנומינלי, שאר האלמנטים יישארו זהים לתרחיש הנומינלי. נדגיש כי עבור וקטור הפרמטרים  $\theta$ , תרחישים א' וב' יהיו שינוי רק בפרמטרים העוצמה המקסימלית ומיקומו בציר ה-x. נגדיר וקטור זה כ  $\theta' = [R, \mu_x]$ . בטבלה 3.1 ניתן להתרשם מהשינוי באלמנטים השונים עבור התרחישים השונים. כאשר בחנו את אלמנט כמות קווי התקשורת עבור תרחיש א' הגרלנו כל פעם שישה צמדים שונים של מדידות שאותם הסרנו ומיצענו את ביצועי המשערכים עבור מגוון רחב של צמדים. עבור תרחיש ב' הוספנו כל פעם שישה צמדים במיקומים מוגרלים שונים ומיצענו את ביצועי המשערכים עבור מגוון רחב של צמדים.

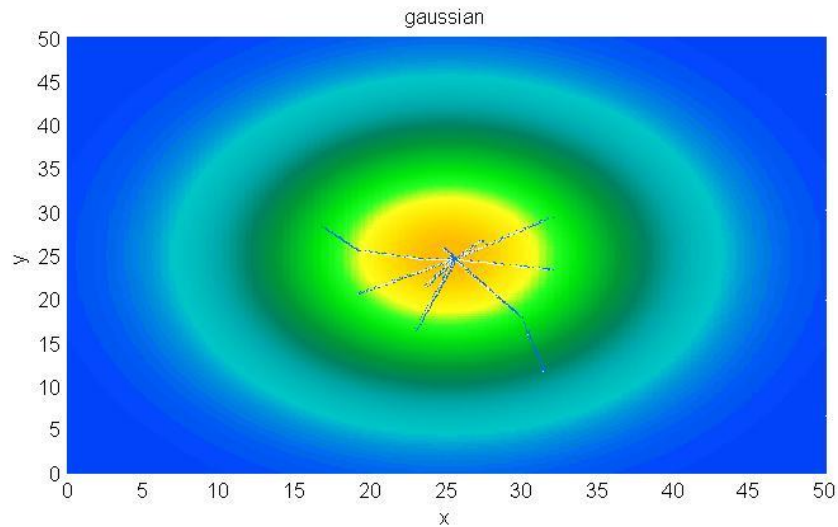
איור 3.3 מציג את השדה גשם הנומינלי, ניתן להתרשם מפריסת קווי התקשורת (בצבע כחול) ביחס למיקום השדה.

$$(3.14) \quad P_{ref} = [E640605, N3487299] \text{ UTM}$$

כאשר דנו במודל הבסיסי היה קל לבחור כיצד לבחון את ביצועי המשערכים, בחנו את ביצועי המשערכים על פי השגיאה הריבועית ה-MSE. נשים לב שעבור וקטור פרמטרים ניתן להגדיר קריטריונים שונים למבחן. ניתן להסתכל על מטריצות השגיאה  $C_{\theta}$  כאשר:

$$C_{\theta} = E((\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^t)$$

ולהגדיר עדיפות משערך כזה על אחר במידה  $C_{\hat{\theta}_1} > C_{\hat{\theta}_2}$  במובן של מטריצה חיובית, כלומר אם מטריצת החיסור  $C_{\hat{\theta}_1} - C_{\hat{\theta}_2}$  חיובית ממש אזי עדיפות למשערך  $\hat{\theta}_2$ . ניתן להסתכל רק על סכום האלכסונים של מטריצה זו, או למשקל בצורה שונה באמצעות מטריצת משקול את הפרמטרים לצרכי הגדרת מבחנים שונים. אנחנו נבחר לבחון את ביצועי המשערכים בצורה המתאימה בעניינו למטרת היישום שלנו.



איור 3.3 התרחיש הנומינלי כפי שמתואר במשוואה (3.13) כאשר כל קו תקשורת מצויר בכחול מסמן צמד קווי התקשורת (אחד לכל כיוון). הצירים  $[x, y]$  הם ביחידות של ק"מ והן מייצגים את המרחק מנקודת הרפרנס  $P_{ref}$  כפי שמצוינת במשוואה (3.14).

בבעייתנו ערכי הפרמטר באים לשרת ולהציג נאמה את שדה הגשם. מכיוון ששדה הגשם הוא זה שחשוב נבחן את המשערכים במובן של השגיאה הריבועית הממוצעת בין שדות הגשם: השדה האמתי המיוצג ע"י וקטור הפרמטרים  $\theta$  לבין השדה המשוערך המיוצג ע"י וקטור הפרמטרים  $\hat{\theta}$ . הממוצע במקרה זה, מורכב הן מממוצע מרחבי המחושב באמצעות אינטגרל משטחי המחולק בשטח אזור העניין, והן מפעולת התוחלת על וקטור המדידות האקראי  $z$  הנמצא בתוך המשערך  $\hat{\theta}$  כפי שמוצג במשוואה (3.15).

$$(3.15) \quad MSE = E\left(\frac{1}{A} \iint (f(x, y; \theta) - f(x, y; \hat{\theta}))^2 dx dy\right)$$

כאשר  $A [km^2]$  הוא שטח של אזור העניין, במקרה שלנו נחשב את השגיאה כאשר  $A = 50^2 [km^2]$  עבור שטח העניין כפי שמוצג באיור 3.3. במשוואה (3.16) מוצג אופן החישוב המסומלץ שבוצע לצורך חישובי ביצועי המשערכים הממוצע בפרק זה.

$$(3.16) \quad MSE = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{1}{N_x \cdot N_y} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_j^{N_y} \left( f(x_i, y_j; \theta) - f(x_i, y_j; \hat{\theta}) \right)^2$$

בשביל להשוות השוואה הוגנת בין התרחישים ולקבל שגיאה שהיא חסרת יחידות, נציג את ה- Root MSE (RMSE) ואת ה- RMSE המנורמל (NRMSE) במשוואה (3.17).

$$(3.17) \quad RMSE = \sqrt{MSE} ; NRMSE = \frac{RMSE}{norm}$$

כאשר הנורמה  $norm$  יכולה להשתנות כתלות בתרחיש אותו נבדוק, כל עוד לא נכתב אחרת ה- NRMSE יחושב עם נורמה שהוא הגשם הממוצע המרחבי עבור וקטור הפרמטרים  $\theta, \bar{f}(\theta)$  וחישובו המקורב מוצג במשוואה (3.18).

$$(3.18) \quad \bar{f}(\theta) = \frac{1}{N_x \cdot N_y} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_j^{N_y} f(x_i, y_j; \theta)$$

כאשר בפרק זה  $N_x = N_y = 500, M = 400$ .

מתוך טבלה 3.2 ניתן להתרשם ממספר דברים:

- ככל שכמות קווי התקשורת עולה תוצאות המשערכים טובים יותר כצפוי.
- ככל שישנם יותר קווי תקשורת בעלי רזולוציית קוונטיזציה גבוהה, תוצאות המשערכים טובים יותר. מתרחיש ב' ניתן להתרשם כי כאשר לכל קווי התקשורת קוונטיזציה ברזולוציה גבוהה ביצועי המשערכים מתלכדים. זאת הגיוני בשל רזולוציית הקוונטיזציה הגבוהה בתרחיש זה. לעומת זאת, עבור תרחיש א' כאשר לכל קווי התקשורת קוונטיזציה ברזולוציה נמוכה ישנה עדיפות לשערוך ה- ML וזאת בשל השוני בין פונקציות המחיר עבור המשערכים השונים כפי שהוסבר בהרחבה בתת פרק 2.2.
- במרביתו המוחלט של התרחישים ביצועי משערוך ה- ML טובים מביצועי משערוך ה- NML. כאשר במודל הבסיסי ראינו שעבור ערכי פרמטרים שונים ניתן לקבל עדיפות למשערוך ה- NML. על סוגיה זו נרחיב בסוף הפרק.
- ניתן לראות כי ביצועי המשערכים תלויים ביחס ישיר ברעש מדידה  $\sigma^2$  וכצפוי לערכי שונות אלו הביצועים יורדים כאשר שונות הרעש עולה. עוד ניתן לשים לב שכאשר שונות רעש המדידה גדלה ביצועי המשערכים כמעט מתלכדים. מקרה זה דומה למקרה לעיל בו ביצועי המשערכים התלכדו עבור רזולוציית קוונטיזציה גבוהה. מקרים אלו דומים מהסיבה כי ההבדלים בין פונקציות המחיר מושפעת מרזולוציית הקוונטיזציה ביחס לשונות רעש המדידה, ולכן הגדלת שונות הרעש מקבילה להגדלת רזולוציית הקוונטיזציה.
- ניתן לראות כי עבור ערכי פרמטר שונים הביצועים משתנים באופן משמעותי, כאשר בתרחיש א' הגאוסין הוזה שמאלה בעשרה ק"מ הביצועים פחתו בסדר גודל.

3.1 טבלה

הפרמטרים של התרחיש הנומינלי: תרחיש א' ותרחיש ב'

תרחיש ב'	תרחיש נומינלי	תרחיש א'	
36	24	12	כמות סנסורים N
$[R = 50, \mu_x = 15]$	$[R = 30, \mu_x = 25]$	$[R = 30, \mu_x = 15]$	עוצמה ומיקום הגאוסין בציר ה-x $\theta' = [R, \mu_x]$
1	0.5	0	תמהיל הקוונטיזציה $\rho_N$
0.05	0.1	0.2	שונות רעש המדידה $\sigma^2$

3.2 טבלה

ערכי ה-NRMSE עבור התרחיש הנומינלי, תרחיש א' ותרחיש ב'

תרחיש ב'		תרחיש נומינלי		תרחיש א'		
NML	ML	NML	ML	NML	ML	
0.101	0.088	0.143	0.139	0.832	0.828	כמות סנסורים N
0.334	0.335			0.846	0.756	עוצמה ומיקום הגאוסין בציר ה-x $\theta' = [R, \mu_x]$
0.119	0.119			0.166	0.164	תמהיל הקוונטיזציה $\rho_N$
0.108	0.1			0.184	0.180	שונות רעש המדידה $\sigma^2$

נרצה להתעכב על שתי נקודות מעניינות מתוך הטבלה 3.2. נשים לב כי כאשר הזנו את הגאוסין עשרה ק"מ ממרכז קווי התקשורת קיבלנו שגיאות גדולות בסדר גודל מהמצב הנומינלי. אנו מבינים כי ככל הנראה יצאנו מתחום השגיאות הקטנות לתחום השגיאות הגדולות. לצורך העמקה בנקודה זו בדקנו את ביצועי המשערכים כפונקציה של המרחק ממרכז הגאוסין באופן רציף. באיור 3.4 ניתן לראות את שורש השגיאה הריבועית RMSE כפונקציה של המרחק מהגאוסין הנומינלי. ניתן לראות שעד אזור השמונה ק"מ אנו תחת שגיאות קטנות, מעבר לכך אנו עוברים לתחום של שגיאות גדולות, כמובן שמרחק זה תלוי במגוון גדול של גורמים והוא תלוי תרחיש אך נתעכב על העיקרון.

תופעה זו מוכרת בתחום איבוד אותות כ- Ambiguity, כאשר עבור המקרה שלנו, שני שדות גשם השונים בהחלט יוצרים מדידות אשר דיי דומות ומקשות על קביעת המשערך של שדה הגשם האמיתי. ע"מ להמחיש טוב יותר את נושא רגישות ביצועי המשערכים למיקום הגאוסין ביחס לקווי התקשורת נציג דוגמא מייצגת. באיור 3.5 מוצגים שני גאוסיינים המייצגים שתי שדות גשם שונים האחד השדה הגשם ה"אמיתי" מאופיין ע"י וקטור פרמטרים  $\theta_{real}$  והשני שדה גשם ה"מתחזה" המאופיין ע"י וקטור פרמטרים  $\theta_{impostor}$  נשים לב שבעוד שלשני השדות רמות גשם שונות בהחלט, וקטור הניחותים:  $A(\theta_{real}), A(\theta_{impostor})$  בקווי התקשורת דומים. (כאשר  $A(\theta)$  הוא וקטור הניחותים כפי שהיה מתקבלות מכל קווי תקשורת אם לא היה קיים רעש מדידה ולא הייתה מתבצעת פעולת הקוונטיזציה). ניתן לראות כי:

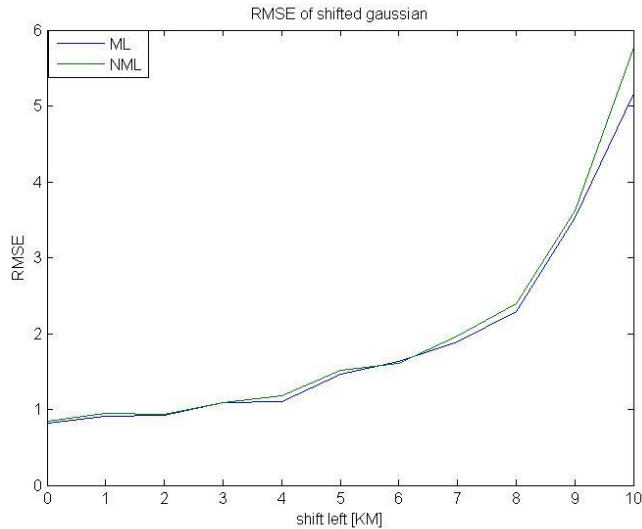
$$\delta_{Attenuation} = \sqrt{\frac{1}{N} \left( (A(\theta_{real}) - A(\theta_{impostor}))^t (A(\theta_{real}) - A(\theta_{impostor})) \right)} = 0.21$$

ניתן לראות כי המרחק הווקטורי בין וקטורי הניחותים קטן, כלומר הוספת רעש מדידה ותהליך הקוונטיזציה עלול להטעות את פעולת השערך. לדוגמא ייתכן מקרה שבעוד ששדה הגשם ה"אמיתי" ירד, בפועל המדידות שייתקבלו בסנסורים יתאימו יותר לשדה ה"מתחזה" בשל רעשי מדידה וקוונטיזציה.

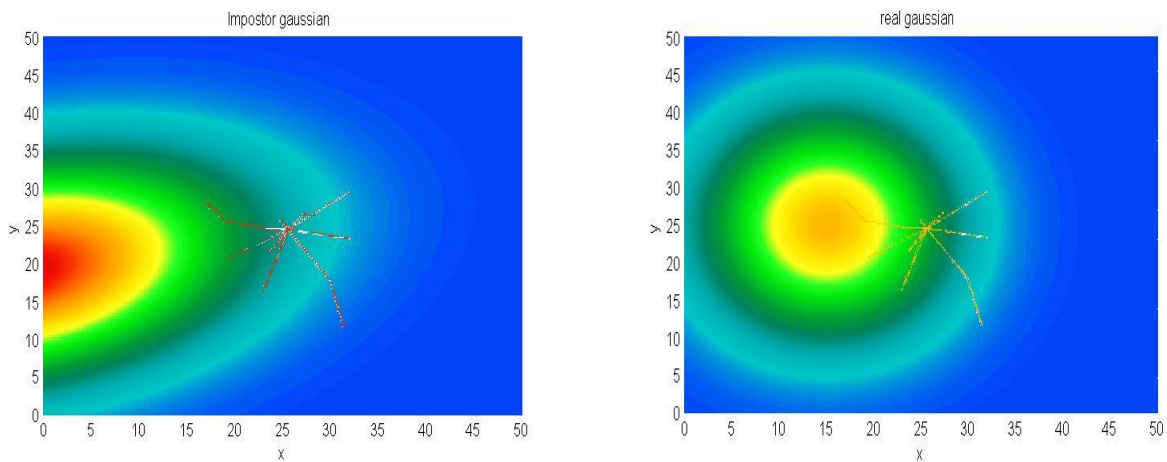
ניתן לראות כי מחיר טעות זו במובן שורש השגיאה הריבועית גדול:

$$\delta_{Rain} = \sqrt{\sum_{k=1}^M \frac{1}{N_x \cdot N_y} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_j^{N_y} \left( f(x_i, y_j; \hat{\theta}_{real}) - f(x_i, y_j; \hat{\theta}_{impostor}) \right)^2} = 15.7$$





איור 3.4 ערכי ה- RMSE עבור המשערכים כפונקציה של מרחק הגאוסין ביחס לגאוסין הנומינלי הנמצא על מרכז מערך קווי התקשורת.

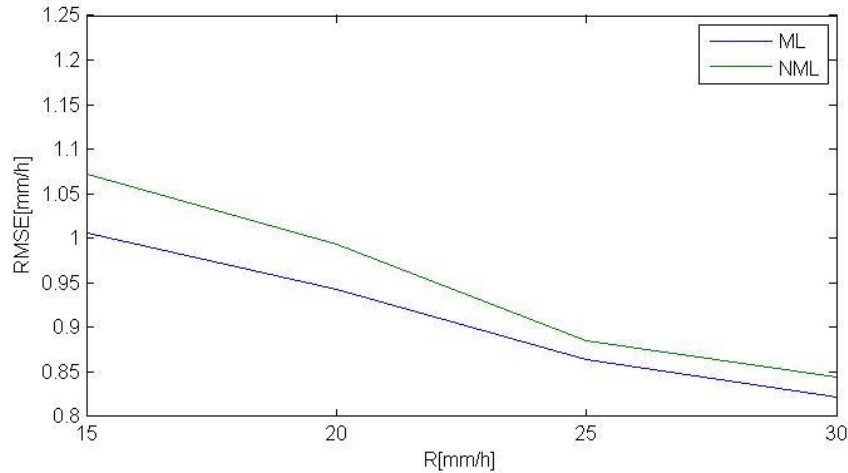


(א) (ב)

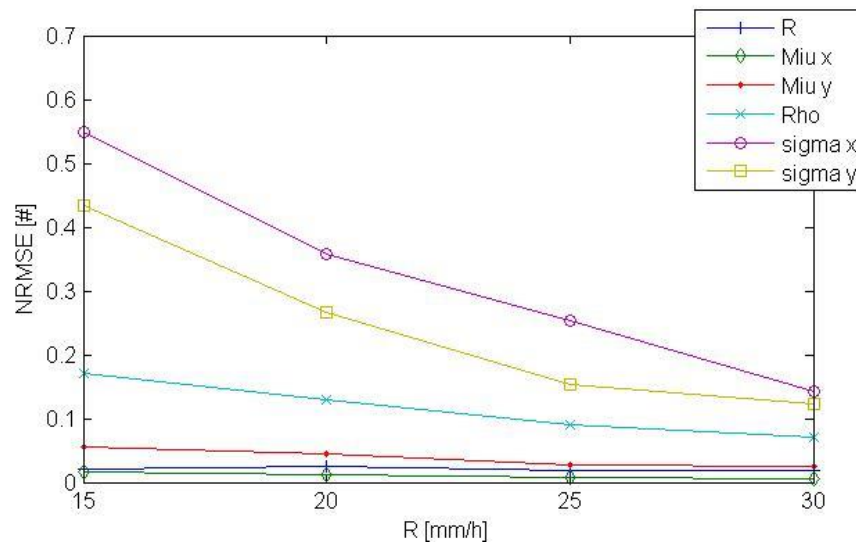
איור 3.5 תת איור (א) מוצג הגאוסין ה"אמיתי", תת איור (ב) מוצג הגאוסין ה"מתחזה".

הנקודה השנייה שנרצה להרחיב זה העובדה שכאשר הגבנה את גובה הגאוסין קיבלנו תוצאות טובות יותר. נזכור כי במודל הבסיסי ראינו כי שגיאת השערוך מחזורית לערכי  $\theta$  ותלויה רק במיקום הפרמטר בתוך המחזור. כלומר אם מחזור הוא 1 ביצועי המשערכים עבור  $\theta = 10$  או  $\theta = 100$  יהיו זהים לחלוטין. ניתן לראות בתת פרק זה כי מבנה זה אינו נשמר עבור המודל הלא לינארי. לצורך העמקה בנושא זה ייצרנו גרף של שגיאת השערוך כפונקציה של גובה הגאוסין. ניתן לראות מתוך איור 3.6 כי שורש שגיאת השערוך יורד ככל שגובה הגאוסין עולה. נרצה להרחיב ולהבין טוב יותר את רגישות שגיאות השערוך של כל פרמטר לשיא גובה הגאוסין האמיתי. לשם כך חישבנו את שורש השגיאות הריבועיות המנורמלת עבור כל פרמטר מתוך וקטור הפרמטרים  $\theta$ . ניתן לראות מתוך איור 3.7 כי הפרמטרים המושפעים ביותר הם שונויות הגאוסין כלומר תפיסת הרחוב שלו. ככל ששיא הגובה של גאוסין גבוה יותר ניתן להבחין טוב יותר ברוחבו האמיתי. על מנת לחוש את האינטואיציה של תופעה זו ניתן לדמות את הגאוסין לאי בלב ים. מפלס

קו המים מדמה את רמות רעש המדידה והקוונטיזציה אשר ממסכים את הבנת צורת הגאוסייין מבחינת קווי התקשורת, כפי שמי הים אינם מאפשרים לראות את חלקי האי שמתחת לפני הים. אם נרצה להבין את צורת האי נעלה אותו מעל קו המים, נוהה תחילה באופן יפה את גובהו ומיקומו, ניתן לראות מתוך איור 3.7 כי אכן שגיאות השערוך של מיקומו וגובהו של הגאוסייין כמעט אינם משתנים כפונקציה של שיא הגובה, אך בשביל להבין את צורתו המלאה של האי נצטרך לעלותו מעל מפלס המים כך שמרבית צורת האי תיחשף. במקרה שלנו וקטור הניחות המתקבל מגאוסייין עם שיא גובה נמוך יהיה בעל ערכים נמוכים ועל כן בעל יחס אות לרעש נמוך. ערכים נמוכים אלו יהיו רגישים לרעשי מדידה וקוונטיזציה, לתופעה זו נקרא "אפקט האי".



איור 3.6 ערכי ה- RMSE כפונקציה של שיא גובה הגאוסייין R כאשר שאר הפרמטרים הם כשל התרחיש הנומינלי.



איור 3.7 ערכי ה- NRMSE כאשר הנרמול הוא בערכי הפרמטרים, כפונקציה של שיא גובה הגאוסייין R, של שערוך ה- ML של הפרמטרים. כאשר פרט לגובה הגאוסייין שאר הפרמטרים הם כשל התרחיש הנומינלי.

נקודה נוספת שנרצה להרחיב זו הנקודה שמשערך ה-ML הציג ביצועים טובים יותר ממשערך ה-NML כמעט בכל התרחישים, בעוד שעבור המודל הבסיסי ראינו כי עדיפות משערך כזה או אחר תלוי בערך הפרמטר  $\theta$ . יתרה מזאת נזכר כי הסיבה המשפיעה על עדיפות משערך כזה או אחר עבור ערך מסוים של  $\theta$  היא פעולת הקוונטיזציה ופונקציות המחיר של כל משערך. במודל הבסיסי כאשר עבדנו עם ערך פרמטר בודד, כל מדידה למעשה מדדה את הפרמטר באופן ישיר עד כדי רעש מדידה ופעולת הקוונטיזציה:  $z_i = Q_i(\theta + n_i)$  במקרה זה ערך הפרמטר  $\theta$  נמדד על ידי כל המדידות ומשפיע באופן זהה על כולם ולכן השפיע ישירות על הבחירה האם עדיף משערך ML או NML. במודל הכללי אין למעשה מדידה ישירה של פרמטר כזה או אחר אלא המדידות הן תוצאת ההטלה של שדה הגשם על קו התקשורת למעשה  $z_i = Q_i(A_i(\theta) + n_i)$ , במודל זה כל מדידה מקבלת ערך אחר של ניחות עבור אותו וקטור פרמטרים. כלומר נתקבל עדיפות למשערך כזה או אחר רק במידה וכל איברי ה- $A_i(\theta)$  יהיו באותו תחום ערכים מסוים, לדוגמה אם איברים אלו יהיו בתחום של הספרה העגולה תתקבל עדיפות למשערך ה-NML כפי באיור 2.10, ניתן לראות באיור זה כי תחום זה בוא הערך העשירוני קטן מ-0.2 או גדול מ-0.8. אם לרגע נסתכל על כל איבר בווקטור הניחות כמשתנה אקראי אחיד לכל מדידה סבירות של 0.4 להיות בתחום זה. אם נרצה שכל המדידות ימצאו בתחום זה נקבל לכך סבירות אפסית:  $P = 0.4^N$  גם אם נגדיל את דרגת החופש ונחפש את הסבירות שמרביתם המוחלט של איברי הניחות  $A_i(\theta)$  יהיו בתחום זה נקבל סבירות אפסית. למעשה במודל הכללי בשל העובדה כי ישנן מדידות רבות, ולכל מדידה ערך ניחות שונה, התלות בין ערכי הפרמטרים השונים מבחינת פעולת הקוונטיזציה קטנה. גיוון ערכי הניחות, אשר חלקם קרובים לערך השלם וחלקם קרובים לערך החצי, גורמים לפעולת השערך למעשה למצע את השפעת ערכי הניחות על השערך. מסיבה זו עבור המודל הכללי ניתן לצפות לעדיפות משערך ה-ML על פני ה-NML מבחינת ביצועים כפי שראינו כאשר מיצענו את ביצועי המשערכים עבור המודל הבסיסי.

### 3.4 סיכום

בפרק זה הצגנו את משערך ה-ML ומשערך ה-NML עבור המודל הכללי. יישמנו את המודל הכללי עבור מיפוי שדות גשם באמצעות סנסורים מסוגים שונים. ראשית מידלנו את שדה הגשם לשדה פרמטרי גאוסי דו ממדי כאשר הצגנו את השיקולים בבחירת הגישה הפרמטרית באופן כללי ובבחירת המודל הגאוסי באופן ספציפי. מידלנו את צורת החישה של קווי תקשורת ושל מד גשם. ביצענו סימולציות על מנת לבחון את ביצועי המשערכים עבור תרחישים שונים והדגשנו את השינויים ביחס לביצועים במודל הבסיסי. מרבית תוצאות הסימולציה התיישבו יחד עם ההבנה התאורטית שפיתחנו בחלקים הקודמים ועם תוצאות הסימולציה עבור המודל הבסיסי. הארנו מספר נקודות מעניינות, האחת היא רגישות ביצועי המשערכים לשינוי ערכי הפרמטרים, הסברנו ואף הדגמנו מקרים בהם ניתן לקבל שגיאות גדולות כשאר שדות גשם שונים בתכלית עלולים ליצור וקטור מדידות קרוב יחסית. בנוסף התעכבנו על השפעת גובה שיא הגאוסיין על ביצועי המשערכים והצגנו את "אפקט האי" אשר מסביר את הקשר בין גובה הגאוסיין לבין ביצועי השערך. ראינו כי ביצועי משערך ה-ML היו עדיפים על ביצועי משערך ה-NML כמעט בכל התרחישים. התרחיש היחיד שמשערך ה-NML עדיף הוא במקרה של גאוסיין הרחוק ממרכז קווי התקשורת והיינו תחת שגיאות גדולות, לא ניחס לכך חשיבות מכיוון שפער זה היה קטן ביחס לשגיאות הגדולות. אגב ניתן לראות באיור 3.4 כי ביצועי המשערך ה-ML היו טובים יותר גם עבור מרחק זה, דבר המרמז שתחת השגיאות הגדולות ייתכן שכמות הסימולציות שנעשו לא אפשרו לקבוע עדיפות מובהקת למשערך כזה או אחר.

עדיפות משערך ה- ML בפרק זה חריגה ביחס למודל הבסיסי בו קיבלנו תחומי עדיפות שונים כתלות בערך הפרמטר. הסברנו את ההבדל העקרוני בין המודל הבסיסי למודל הכללי והראנו בגישה סטטיסטית כי לא סביר לקבל עדיפות למשערך ה- NML.

## 4 חוסר התאמה למודל - Mismodeling

במהלך העבודה כאשר הצגנו את המודלים הבסיסי והכללי ופיתחנו עבורם את משעריך ה-ML המלא והמשעריך הנאיבי NML, הנחנו כי המודל מתאר באופן מדויק את המציאות. בפרק זה נתייחס למקרים בהם ישנה התאמה חלקית בין המודל למציאות. כלומר יש כשל בתיאור המציאות באמצעות המודל באופן כזה שייתכנו מדידות אשר לא מכילות אינפורמציה אמינה לגבי וקטור הפרמטרים  $\theta$ . נפריד בין שני מקרים של חוסר התאמה למודל: חוסר התאמה בין השדה הפרמטרי לשדה הפיזיקלי, לעומת חוסר התאמה בין אופן החישה של הסנסור לבין המודל המתאר את חישה זו. נפתח משעריך חדש אשר רובסטי לחלק מהמקרים של חוסר התאמה למודל, נקראת לו משעריך ה- Robust ML (RML). נשווה את ביצועי משעריך זה מול המשערכים המוכרים: ML, NML.

### 4.1 פרוט על חוסר התאמה למודל

נתייחס לשני מקרים מרכזיים שגורמים לחוסר התאמה של המציאות למודל. מקרה אחד הוא כאשר שדה הגשם האמתי  $f(x, y)$  לא ניתן לתיאור באופן מלא ע"י  $\hat{f}(x, y; \theta)$  שהוא השדה פרמטרי המתאר את השדה עפ"י המודל, עבור כל וקטור  $\theta$  כלשהו. מקרה זה מתאים למשל למצב בו המודל של שדה הגשם הוא מודל גאוסייני דו ממדי בעוד ששדה הגשם האמתי אינו כזה. המקרה השני מתייחס למצב בו פונקציית החישה  $s_i(f(x, y; \theta))$  אינה מתארת נאמנה את האופי בו הסנסור חש את השדה על אף ששדה פרמטרי זה מתאר נאמנה את השדה האמיתי. מצב זה יכול לקרות בתנאים מציאותיים רבים: קו תקשורת שהפסיק לשדר לפרק זמן קצר, קיימת הפרעה חזקה בערוץ שאינה קשורה לשדה הגשם, חוסר סנכרון זמנים בין קווי תקשורת שונים גורמים למדידות לתאר זמנים שונים, חישוב לא נכון של רמת האפס, תופעת אנטנה רטובה שאינה נלקחת בחשבון ועוד. קו תקשורת שאינו יתאים למודל באופן זה יקרא קו סורח.

### 4.2 רגישות המשערכים הקיימים במקרה של מודל חסר

ע"מ להבין את רגישות המשערכים לחוסר התאמה למודל נתבונן בפונקציות המחיר של המשערכים השונים. כפי שניתן לראות מתוך משוואות: (3.2), (3.3). ניתן לכתוב את פונקציות המחיר של המשערכים באופן הבא:

$$(4.1) \quad cost_{nml} = \sum_i cost_{nml i} = \sum_i \left( \frac{(z_i - A_i(\theta))^2}{2\sigma_i^2} \right)$$

$$(4.2) \quad cost_{ml} = \sum_{i=1}^N cost_{ml i} = \sum_{i=1}^N -\log \left( \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} e^{-\frac{(y - A_i(\theta))^2}{2\sigma_i^2}} dy \right)$$

כאשר  $A_i(\theta)$  היא פונקציית החישה של השדה, במשוואה (3.10) היא מפורטת למקרה בו הסנסור היינו קו תקשורת. עוד נזכר כי:  $z_i = Q_i(A_i(\theta) + \mathbf{n}_i)$ .

באיור 2.4 ניתן לראות את פונקציות המחיר השונות  $cost_{ml}, cost_{nml}$  כפי שמתוארות במשוואות: (2.15), (2.16), עבור מדידה בודדת. אך הפעם במקום שפונקציות המחיר יהיו ממורכזות סביב ערך הפרמטר  $\theta$ , כפי שעשינו עבור המודל הבסיסי, ימורכזו סביב ערך הניחות  $A_i(\theta)$ . נזכור כי וקטור הפרמטר המשוער הוא זה שיביא למינימום את פונקציית מחירו. נזכור כי פונקציית מחיר של משערך ה-ML היא פעולת לוג על פונקציית הסבירות. מתוך התבוננות באיור 2.4 ניתן לראות כי ישנם ערכים רבים של מדידה שהם למעשה אינם סבירים. נמחיש זאת ע"י דוגמא. למשל נניח שעבור וקטור פרמטרים  $\theta_0$ , יוצא כי הניחות של סנסור  $i$   $A_i(\theta_0)$  שצריך להתקבל הוא 10. הסבירות שהמדידה  $z_i = 5$  מתוך האיור היא סדר גודל  $10^{-100} \cong P(z_i = 5; A_i = 10)$ . כלומר סבירות אפסית. כאשר המציאות מתאימה למודל אין שום בעיה עם תחומים אלו של פונקציות המחיר מכיוון שהסיכוי שמדידה תתקבל בתחום זה הוא אפסי, ולכן זהו תחום תיאורטי בלבד. אך כאשר המציאות אינה מתאימה למודל, תתכן מדידה בתחום לא סביר זה שעלולה להטות את תוצאות המשערכים. הרי אם בגלל חוסר התאמה למודל המדידה שתתקבל היא  $z_i = 5$ , משערכי ה-ML וה-NML ייקחו זאת בחשבון. יתרה מכך, ראינו מתוך המודל הבסיסי כי משערך ה-ML ממשקל באופן כבד יותר את המדידות הפחות סבירות ביחס לשאר המדידות, ולכן במקרה זה של חוסר התאמה למודל ייתכן ומדידה זו תסחף את התוצאה לכיוונה ולמעשה תגרום לשגיאת שערך גדולה.

### 4.3 הצגת משערך ה-RML

מתוך הבנה של תת פרק 4.2 נציע משערך אשר יהיה רובסטי לחלק מהמקרים של חוסר התאמה למודל.

הבנו כי מדידות אשר אינן מתאימות למודל למעשה אינן מספקות אינפורמציה שניתנת לניתוח לגבי המציאות כפי שאנו מכירים ולכן נרצה למעשה להתעלם ממנה. ננסח באופן מתמטי משערך אשר יבצע פעולה זו.

לצורך כך נקבע סף סבירות כזה שבשאיפה המדידות המקיימות את המודל יעברו את סף סבירות, והמדידות שאינן מקיימות את המודל לא יעברו את הסף. נגדיר תנאי סבירות למדידה, תנאי הסבירות יתקיים במידה והמדידה עברה את סף הסבירות. נרצה להשיג משערך הממקסם את כמות המדידות המקיימות את תנאי הסבירות (אחרת אנחנו מפספסים מדידה שמקיימת את המודל), ומתוך מדידות אלו למקסם את הסבירות של המדידות אשר מקיימות את תנאי הסבירות כלומר למקסם את פונקציית הנראות  $L(\tilde{z}(\theta); \theta)$ , כאשר  $\tilde{z}(\theta)$  הוא ווקטור המדידות המקיימות את תנאי הסבירות והוא כמובן תלוי בערך ווקטור הפרמטרים  $\theta$ .

נגדיר את תנאי הסבירות:

$$(4.3) \quad p(z_i; \theta) > \alpha$$

סף הסבירות  $\alpha$  היינו פרמטר חופשי הניתן לקביעה כתלות באפליקציות והתרחישים השונים, נרחיב על אופן קביעתו בהמשך.

כעת נבצע מספר הגדרות עזר על מנת שנוכל לבנות את המשערך באופן מתמטי, נגדיר משתנה בינארי  $b_i$  אשר יהיה שווה לאחד אם המדידה  $i$  עומדת בתנאי הסבירות, כך ש:

$$(4.4) \quad b_i(z_i; \theta) = \begin{cases} 1 & \text{if } p(z_i; \theta) > \alpha \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

כעת נגדיר את כמות המדידות המקיימות את תנאי הסבירות באופן הבא :

$$(4.5) \quad I(\mathbf{z}; \theta) = \sum_i b_i(z_i; \theta)$$

מכיוון ש- $I(\mathbf{z}; \theta)$  תלוי בערך וקטור  $\theta$  עצמו, נגדיר את כמות המדידות המקסימלית העומדות בתנאי הסבירות להיות כמות המדידות המרבית ביותר מתוך כל ערכי וקטור  $\theta$  האפשריים.  $I_{max} = \max_{\theta}(I)$ .

כעת נוכל להגדיר את המשערך אשר ימקסם את כמות המדידות המקיימות את תנאי הסבירות, ובנוסף ימקסם את פונקציית הנראות עבור המדידות המקיימות את תנאי הסבירות. כעת נגדיר את המשערך באופן הבא :

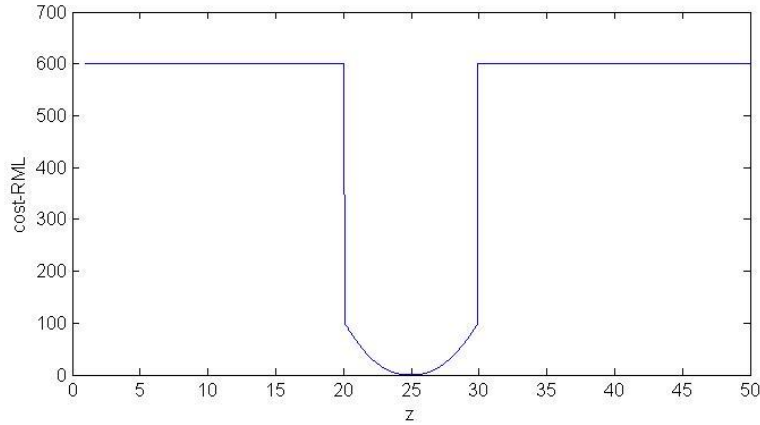
$$(4.6) \quad \hat{\theta}_{RML} = \theta \ni I(\theta) = I_{max} \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} L(\tilde{\mathbf{z}}(\theta); \theta)$$

אם נחשוב על פונקציית מחיר שמזעור שלה נותן את משערך ה-RML למעשה נסתכל על פונקציית מחיר הבאה:

$$(4.7) \quad \begin{aligned} cost_{RML} &= \sum_i (-b_i(z_i; \theta)L(z_i; \theta) + (1 - b_i(z_i; \theta))const_{max}) \\ &= (N - I(\mathbf{z}; \theta))const_{max} - L(\tilde{\mathbf{z}}(\theta); \theta) \end{aligned}$$

כאשר  $const_{max}$  מוגדר להיות המחיר המקסימלי, לדוגמא  $const_{max} = -N \log(\alpha)$ , הווקטור  $\tilde{\mathbf{z}}(\theta)$  מכיל את כל המדידות אשר נמצאות בתחום הסבירות אשר תלוי כמובן בערכי הווקטור  $\theta$ .

הרעיון הוא שפונקציית המחיר תיתן מחיר מקסימלי עבור כל מדידה שאינה מקיימת את תנאי הסבירות, ולכן באופן טבעי משערך שיביא למינימום את פונקציית המחיר יחפש בתחום הפרמטר בו כמות המדידות המקסימלית המקיימות את תנאי הסבירות. בתחום זה, המשערך ימצא את וקטור הפרמטרים  $\theta$ , אשר מביא את פונקציית המחיר למינימום (כלומר את פונקציית הנראות למקסימום) עבור המדידות המקיימות את תנאי הסבירות. ניתן להתרשם מתוך איור 4.3 בפונקציית המחיר עבור מדידה בודדת.



איור 4.1 ערכי  $cost_{rml}$  כפונקציה של ערכי המדידה  $z_i$  כאשר  $\sigma^2 = 0.1$  ורזולוציית הקוונטיזציה  $\Delta = 1$ . כאשר  $\alpha = 10^{-100}$  ו- $const_{max} = 600$

באופן גאומטרי ניתן לחשוב שע"י האילוץ:  $I(\theta) = I_{max}$  או מגדירים תת מרחב מתוך המרחב ה- $N$  ממדי האפשרי של וקטור הפרמטרים  $\theta$ . בתוך תת מרחב זה אנו מחפשים את וקטור הפרמטרים שמביא למקסימום את פונקציית הנראות עבור המדידות המקיימות את תנאי הסבירות.

חשוב לציין כי יש הבדל מהותי בין שני סוגי חוסר ההתאמה למודל כפי שהצגנו בתת פרק זה. כאשר חוסר התאמה למודל נובעת מקו סורח הפתרון הטוב ביותר הוא להתעלם ממדידה זו ולכן המשערך שהצענו יעשה עבודה זו נאמנה. נשאלת השאלה האם זה הדבר הטוב ביותר לעשות כאשר חוסר ההתאמה נובע מחוסר התאמה של השדה הפיזיקלי? ככל הנראה התשובה היא שלילית, מכיוון שקווי תקשורת שלא מקיימים את תנאי הסבירות אומנם אינם מכילים אינפורמציה אמינה לגבי וקטור הפרמטרים  $\theta$  אך מכילים אינפורמציה לגבי השדה האמתי גם אם זה אינו מתאים למודל. ייתכן וניתן לחשוב על משערך שאינו פוסל את מדידות אלו אלא מתייחס אליהן באופן שונה, אך עבודתנו לא תרחיב לכיוונים מעניינים אלו אשר מצריכים התעמקות מיוחדת.

משערך ה- $RML$  ישפר את ביצועי השערך ביחס למשערכים הקיימים, כאשר קומץ קטן של מדידות אשר אינן מקיימות את המודל גרמו למשערכי ה- $ML$  וה- $NML$  לשערך שדה שונה באופן מהותי מהשדה הקיים. כלומר משערך ה- $RML$  טוב לתרחישים בהם חוסר ההתאמה למודל נובע מקווים סורחים או במקרה בו השדות המציאותיים דומים באופיין לשדה הפרמטרי עד כדי הפרעה קטנה או חוסר התאמה עבור קומץ קווי תקשורת.

נרחיב על בחירתה של  $\alpha$ , כאמור פרמטר זה ניתן לקביעה והוא עשוי להשתנות עבור יישומים שונים ועבור תרחישים שונים. פרמטר זה קובע את תנאי הסבירות, כלומר מדידות אשר אינן עוברות סף סבירות זה לא יחשבו כחלק מתהליך השערך. ברור כי אם נבחר את  $\alpha$  להיות אפס אזי משערך ה- $RML$  יתלכד עם משערך ה- $ML$  ולמעשה המשערך ישתמש בכל המדידות בתהליך השערך. כאשר נבחר את  $\alpha$  להיות 1 נקבל בעצם משערך "עקר" שלא לוקח שום מדידה בתהליך השערך. מכיוון ש- $\alpha$  הוא הגורם המקשר בין המודל למציאות שאינה ידועה לא ניתן לקבוע אותו באופן כללי אלא נדרש לבחור אותו בקפידה כתלות ביישום ובתרחישים השונים, בחלק זה ניתן מספר קווים מנחים בבחירתו ונציג את האופן בו בחרנו לעבודתנו.



הבעיה בקביעת ערך גבוה של  $\alpha$  היא שאנו עלולים לפסול מדידות שאכן מכילות אינפורמציה "טובה" על וקטור הפרמטרים שאותו נדרש לשערך. הסבירות של כל מדידה תלויה באופן ישיר במודל ובהנחות המודל. לדוגמה אם השדה המציאותי מתנהג באופן דיי דומה למודל אך לא באופן מלא. אם לדוגמה הנחנו שדה גאוסייני ובפעול השדה המציאותי היה שדה אקספוננציאלי, בחירה הדוקה של  $\alpha$  תפסול את מרבית המדידות, בעוד שבחירה מתירנית של  $\alpha$  תאפשר שימוש במרבית המדידות ותשערך את הגאוסייני שהוא הקרוב ביותר לצורתו האקספוננציאלית. בנוסף ייתכן וחלק מהנחות המודל לא מתקיימות במלואן, דוגמה לכך ניתן לראות מתוך המודל הכללי. עבור המודל הכללי הנחנו ידיעה של שונות רעש המדידה  $\sigma_i^2$ , ככל ששונות רעש זו גדלה נקבל מגוון רחב של ערכים שהם סבירים. אך למעשה ביישומים רבים שונות אלו משוערכות מתוך מדידות עבר של הסנסור. שערך באופן טבעי מכיל שגיאות אם נניח שערךנו שונות רעש מדידה נמוכה מידי ביחס לשונות האמתית של סנסור ייתכן ונפסול מדידות סבירות רק מכיוון שלא שערךנו נכונה את שונות הרעש. ולכן קו המנחה הוא שקביעת  $\alpha$  אינה יכולה להיבחר באופן תיאורטי בלבד אלא מתוך בחינה מול המציאות. נציג מספר גישות מבין רבות שניתן לנקוט בבחירת  $\alpha$ :

**בחירה מתוך ספרות:** על מנת לבחור את  $\alpha$  ראשית יש לנתח את המקרים בהם סביר לקבל חוסר התאמה למודל עבור היישום והתרחיש הספציפי, לדוגמה, עבור המקרה שלנו בו אנו משערכים שדה גשם ייתכנו שני מקרים אופייניים, שדה גשם שאינו תואם את המודל או סנסור סורח אשר מראה מדידה אינה אמינה בשל בעיות טכניות תזמון וכו'. עבור האפשרות הראשונה ניתן מתוך הספרות לבדוק את שגיאות המודלים הפרמטרים ביחס למציאות כפי שנבחנו. לגבי האפשרות השנייה של מדידה סורחת ניתן להניח לשם פשטות כי צפוי שהיא תהיה שגיאה גדולה יותר מהשגיאה של הסוג הראשון בשל אופייה. ולכן ניתן לקבוע את  $\alpha$  לפי סטיית התקן של השערך הפרמטרי של שדות הגשם מתוך נתוני הספרות.

**בחירה מתוך סדרת אימון:** לדוגמה כאשר אנו בוחנים שדה גשם באזור בו יש כיסוי מכ"מ או פריסה רחבה של מדדי גשם, נוכל בסדרת האימון לחשב את שגיאות השערך ולהציע  $\alpha$  כפי שהצענו ב"בחירה מתוך ספרות" רק שסטיית התקן תחושב משגיאת השערך של סדרת האימון.

**בחירה דינמית:** אפשרות נוספת לקביעת  $\alpha$  היא להעלות את ערכה עד לערך שמדידות מתחילות לא לקיים את תנאי הסבירות, בערכים אלו נקבל שיערך  $\hat{\theta}_{rml}$  אשר שונה ממשערך ה-  $\hat{\theta}_{rml}$ . נבדוק האם פונקציית ה- Likelihood של המדידות המקיימות את תנאי הסבירות גדלה עבור המשערך ה- RML ביחס למשערך ה- ML. כלומר האם:

$$L(\tilde{\mathbf{z}}; \hat{\theta}_{rml}) > L(\tilde{\mathbf{z}}; \hat{\theta}_{ml})$$

כאשר  $\tilde{\mathbf{z}}$  היינו וקטור המדידות המקיימות את תנאי הסבירות.

אלגוריתם זה בא לבחון האם המדידות שהם הפחות סבירות מפריעות לשערך והאם בהעדרם פונקציית ה- Likelihood גדלה. אך יש להיזהר, אלגוריתם זה ללא גורם מרסן עלול לגרום למדידות רבות אשר מכילות אינפורמציה אמינה לא לעמוד בתנאי הסבירות רק בשל היותם פחות סבירות, אך ייתכן שסבירות זו נובעת מתוך המודל ולכן מדידות אלו מכילות אינפורמציה חשובה. נציע לרסן את אלגוריתם זה בשתי שיטות משולבות, האחת להגביל את ערכי  $\alpha$  כך שלא יפסלו יותר מכמות מדידות מוסכמת  $N_\alpha$ , בנוסף נדרוש כי ערך ה-  $\alpha$  יגרום למדידות המקיימות את תנאי הסבירות להיות סבירות יותר באופן משמעותי, כלומר לעלות באופן משמעותי את ערך ה- Likelihood עבור וקטור השערך  $\hat{\theta}_{rml}$ . נגדיר את יחס השיפור:

$$(4.8) \quad L_{delta} = \frac{L(\tilde{\mathbf{z}}; \hat{\theta}_{rml}) - L(\tilde{\mathbf{z}}; \hat{\theta}_{ml})}{L(\tilde{\mathbf{z}}; \hat{\theta}_{ml})} > L_{const}$$

נרחיב על הרעיון מאחורי גורמי ריסון אלו: גורם הריסון הראשון קובע כמות מדידות מקסימלית  $N_\alpha$  שאינן עומדות בתנאי הסבירות נובע מכך שאין אנו רוצים לפסול מדידות רבות מכיוון שהנחת העבודה היא שהמודל מתאים פחות או יותר למציאות ולכן לא נרצה שיוצר מצב בו ישנה כמות מדידות גדולה שאינה מקיימת את תנאי הסבירות. גורם הריסון השני, המגדיר יחס שיפור גדול מערך סף  $L_{const}$  למעשה מתאים להנחת חוסר ההתאמה למודל. ההנחה זו קובעת כי מדידה שאינה מתאימה למודל חריגה באופן משמעותי ו"גוררת" את המשערך להיות בעל ערכים שהם פחות סבירים עבור המדידות אשר מקיימות את המודל, ולכן הסרת מדידות שאינן מתאימות למודל אמורה לשפר באופן משמעותי את סבירות המדידות האחרות. קביעת ערך  $L_{const}$  למעשה מכמתת את המושג "משמעותי". כלומר, עונה על השאלה בכמה שאר המדידות צריכות להיות סבירות יותר?

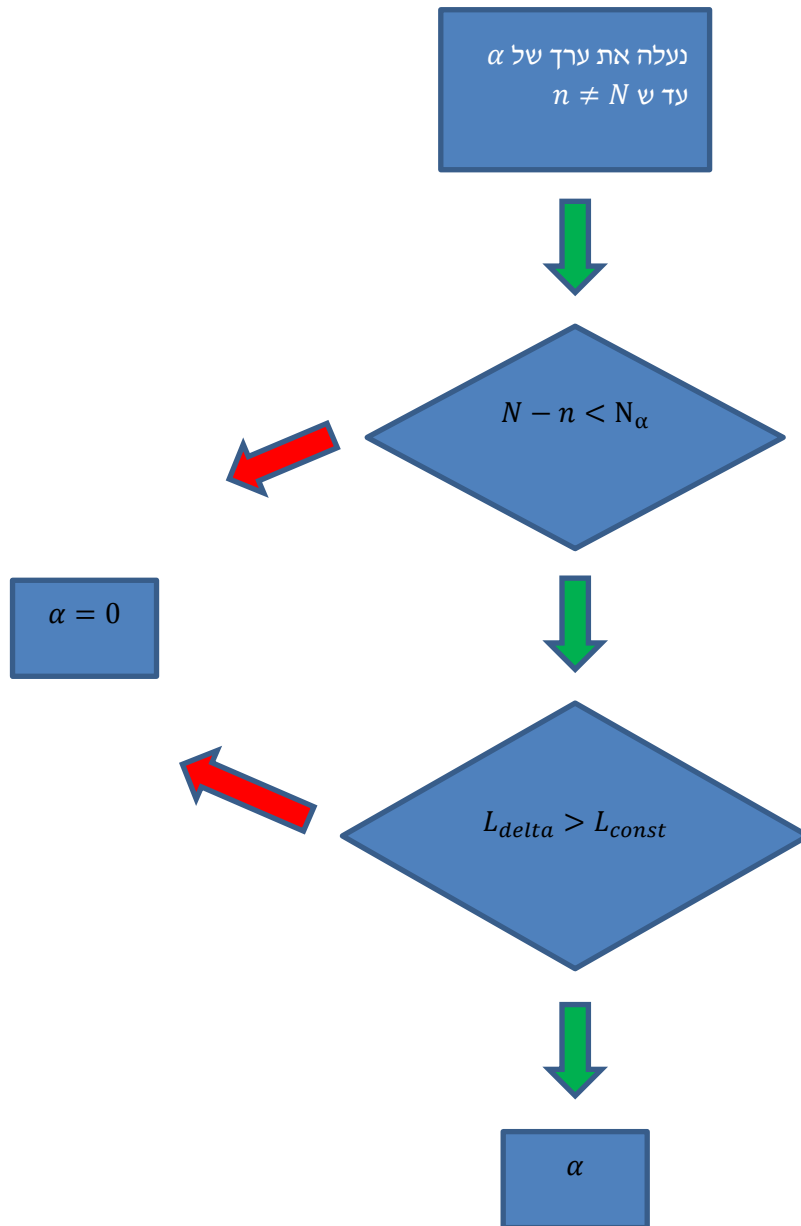
למעשה ניתן לחשוב שלא פתרנו את הבעיה של בחירת  $\alpha$  אלא החלפנו אותה בבעיה חדשה בחירת  $L_{const}$  ו  $N_\alpha$ . זה לא מדויק, אם היינו מקבעים את  $\alpha$  להיות ערך מסוים שאינו תלוי במדידות הוא היה קבוע לכל משך השערוך, האלגוריתם הדינמי מאפשר לקבוע ערך שונה של  $\alpha$  עבור כל אירוע בנפרד לפי המדידות. בעוד שערכי  $L_{const}$  ו  $N_\alpha$  נקבעים פעם אחת.

כעת נציג כיצד בחרנו אותם לצורך היישום שלנו. בהמשך הפרק ניתן תיאור סכמתי את האלגוריתם לבחירת  $\alpha$  בבחירה דינמית. נדגיש כי זו הדרך שבחרנו לרסן את הבחירה הדינמית על מנת למנוע מצב שנפסלות מדידות שהן מתאימות למודל אך כמובן שניתן לחשוב על דרכים שונות ומגוונות לרסן את הבחירה.

בעבודתנו בחרנו את ערך ה-  $\alpha$  באופן דינמי, כאשר הקו המנחה לבחירת  $N_\alpha$  ו  $L_{const}$  הוא כזה שלא נרצה שמשערך  $\hat{\theta}_{rml}$  יפגע בביצועים ביחס לשערוך ה-  $\hat{\theta}_{ml}$ , כלומר, נעדיף תרחישים בהם הוא אינו מזהה חוסר התאמה למודל מאשר מקרים בהם הוא פוסל מדידות אשר מקיימות את המודל. בנוסף בחרנו ערכים אשר מתאימים לתרחישי חוסר התאמה למודל שאנו צופים ביישום זה. נתייחס לבחירת פרמטרים אלו הן בסימולציות והן בתוצאות האמת.

### אלגוריתם לבחירה דינמית של $\alpha$ :

מושגים:  $N$  סה"כ המדידות,  $n$  כמות המדידות המקיימות את תנאי הסבירות,  $N_\alpha$  חסם עליון לכמות המדידות המרבית שלא יקיימו את תנאי הסבירות.  $L_{delta}$  יחס השיפור של פונקציית ה- Likelihood ומתואר במשוואה (4.8),  $L_{const}$  ערך הסף של יחס השיפור.



הצגנו מגוון מצומצם של דרכים לבחירת  $\alpha$ , אך סוגיה זו מורכבת ומצריכה התבוננות מיוחדת שרצוי להרחיב בעבודות המשך.

#### 4.4 סימולציות תחת חוסר התאמה למודל

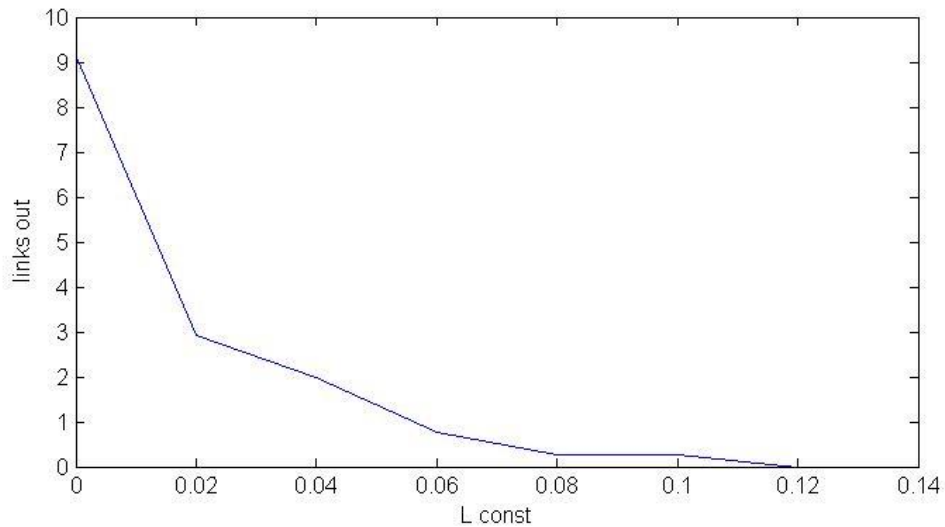
בתת פרק זה ביצענו סימולציות מונטה קרלו על מנת לבחון את ביצועי משערך ה-RML לעומת משערכי ה-ML, NML. בחנו שני סוגי תרחישים. הראשון תרחיש בו יש חוסר התאמה למודל בכך ששדה הגשם שונה מהמודל הגאומטרי, התרחיש השני הוא כאשר ישנו קו תקשורת סורח המציג תוצאה אפס שאינה מתאימה למודל המקשר בין אותה המדידה לשדה הפרמטרי. למשערך ה-RML פרמטר חופשי שניתן לשינוי  $\alpha$ , את ערך זה בחרנו על פי האלגוריתם הדינמי כפי שהוצג

בתת הפרק הקודם 4.3. אין מטרת פרק זה להראות כי זו הדרך הטובה ביותר לבחירת  $\alpha$  אלא לבחון את משעריך ה-RML עבור חלק מהמקרים של חוסר התאמה למודל. כמובן שכל אפליקציה שתוצאה להשתמש במשעריך זה תוכל להציע שיטות שונות לבחירת הפרמטר  $\alpha$  המתאים לתפיסת המציאות של אותה אפליקציה.

על מנת לשערך את וקטור הפרמטרים  $\theta$  באמצעות משעריך ה-RML נדרש לקבוע את הפרמטרים הנכונים עבור האלגוריתם לקביעה הדינמית של  $\alpha : N_{\alpha}, L_{const}$ . כאשר  $L_{const}$  הוגדר ב (4.8)  $N_{\alpha}$  זה חסם עליון לכמות המדידות שלא יקיימו את תנאי הסבירות. ברור שככל שעריך  $L_{const}$  יהיה נמוך יבחרו ערכי  $\alpha$  אשר יגרמו למדידות רבות יותר לא לקיים את תנאי הסבירות כפי שתיארנו בהרחבה בתת הפרק הקודם, נשאלת השאלה מה הוא הערך עבורו  $L_{const}$  יגרום מחד לערכי  $\alpha$  כאלו כך שכל מדידות המקיימות את המודל יעמדו בתנאי הסבירות ומנגד יגרום לכך שמדידות שאינן מקיימות את המודל לא יעמדו בתנאי זה.

לצורך הבנה טובה יותר בקביעת ערך  $L_{const}$  ביצענו סימולציה של השדה הנומינלי כפי שהוגדר ב (3.13). בשלב ראשון לא הכנסנו שום גורם הפרעה למודל, ולכן כל המדידות מקיימות את המודל. נרצה לבחור ערך פרמטרים כזה שלא יפסול שום מדידה. בחנו את כמות קווי תקשורת שאינם עמדו בתנאי הסבירות עפ"י האלגוריתם הדינמי לבחירת  $\alpha$  כפונקציה של הפרמטר  $L_{const}$ . מתוך איור 4.2 ניתן לראות כאשר ערך פרמטר זה היה אפס למעשה מדידות רבות אינן קיימו את התנאי וככל שעריך זה עלה יותר מדידות קיימו את תנאי. נזכיר כי בסימולציה זו לא הוכנס שום גורם הפרעה ולמעשה לא אמורות להיפסל מדידות כלל כלומר צריכה להיבחר  $\alpha = 0$  כך שכל המדידות יקיימו את התנאי ומשעריך ה-RML יתלכד עם משעריך ה-ML. ניתן לראות שעבור  $L_{const} = 0.12$  ואילך כל המדידות קיימו את התנאי.

בעבודתנו ניתחנו שני סוגים מרכזיים של חוסר התאמה למודל, הראשון חוסר התאמה של שדה הגשם האמיתי לשדה הפרמטרי, הסוג השני היינו חוסר התאמה בין מדידת הסנסור לפונקציית החישה שלו, קראנו לסנסור כזה סנסור סורח והנחנו שמקרים כאלו עלולים לקרות בשל בעיות טכניות, סנכרון זמנים ועוד. לפי ניתוח זה ניתן להניח שסנסורים סורחים יהיו "קלים" יותר לזיהוי מכיוון שהם צפויים לתת מדידות חריגות ביחס למודל באופן מובהק יותר, ועל כן הדגש בבחירת  $\alpha$  יינתן מתוך השיקול של חוסר התאמת השדה. נניח כי השדה האמיתי תואם במרבית שטחו את השדה הפרמטרי וכי ישנו אזור מצומצם בו מתקיימת חוסר התאמה למודל, אנו מניחים זאת מכיוון שעבור תרחיש זה משעריך ה-RML יניב שעריך טוב ביותר כפי שכבר ציינו בעבר. מתוך שיקול זה ומתוך הזהירות המתבקשת כפי שצינו בפסקה לעיל נגדיר ליישום שלנו:  $N_{\alpha} = 2$ , כך שלא נרצה שיפסלו יותר משתי מדידות. בנוסף אנו מצפים שאם אכן מתקיימת חוסר התאמה למודל הסרת המדידות תשפר באופן ניכר את ערך ה-Likelihood. מתוך הסימולציה לעיל נגדיר זאת כשיפור של 14% על מנת שמדידות המקיימות את המודל לא ייפסלו כלומר  $L_{delta} = 0.14$  ונבחן הגדרה זו מול תוצאות הסימולציות אשר בהם יש חוסר התאמה בין המודל למציאות.



איור 4.2 כמות המדידות הממוצעת שאינן מקיימות את תנאי הסבירות (link out) כפונקציה של ערך הסף  $L_{const}$ .

כחלק מהצגת התוצאות נציג לכל משעריך את השדה המשוערך האופייני לו, כאשר נגדיר שדה זה כשדה אשר שגיאת השערוך שלו היא השגיאה החזיונית. בנוסף נציג את שורש השגיאה הריבועית המנורמל. במקרה של חוסר התאמה של מודל שדה הגשם ננרמל לשגיאת השערוך עבור גאוס מושלם.

כעת נרצה לבחון את ביצועי המשערכים כאשר השדה אינו תואם את המציאות, ראשית נכניס "גורם הפרעה" לתוך השדה הגאואסי הדו מימדי, את גורם הפרעה זה נמדל בתור גאואסיין נוסף קטן ממדים (השוניות בשני ציריו קטנים) אשר "מפריע" באזור מצומצם לשדה האמיתי. נציין כי אין זה המצב של שדה בעל שני גאואסיינים מכיוון שגורם ההפרעה הוא מאוד נקודתי וכמעט ואינו מורגש ע"י מרביתם המוחלט של קווי התקשורת. באיור 4.3 ניתן להתרשם מביצועי המשערכים למקרה בו השדה האמיתי אינו תואם את השדה הגאואסי. בתת איור (א) ניתן לראות כי קו התקשורת הפונה מזרחה למעשה חש בגשם שאינו מתאים למודל הגאואסי. בתת איורים (א), ו- (ב) מוצגים השדות האופייניים למשערכים, ניתן לראות כי משעריך ה-RML אינו לוקח בחשבון את המדידות של העורק הכפול הפונה מזרחה כצפוי, לעומתו משערכי ה-NML, ML, לוקחים אותו בחשבון. ניתן לראות שהערך הניחות הגבוהה של קו תקשורת גרם למשערכים לשעריך גאואסיין מכיוון מזרח השונה באופן מהותי מהשדה האמיתי. ניתן לראות באופן ויזואלי התאמה טובה של השדה האופייני המשוערך ע"י משעריך ה-RML, מתוך טבלה 4.1 ניתן לראות כי משעריך זה משיג שגיאת שערוך קטנה באופן משמעותי משאר המשערכים. כאשר NRMSE הוא שורש השגיאה הריבועית מנורמלת בערך הגשם הממוצע של שדה הגשם. ערך הסף נבחר באופן דינמי  $\alpha = 10^{-21}$ .

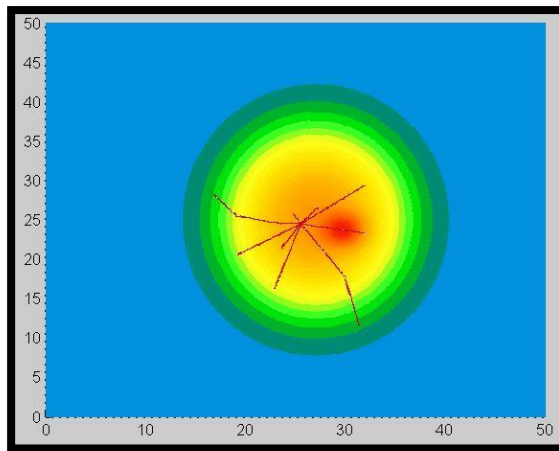
המשכנו לבחון מגוון גדול יותר של שדות שאינן מתאימים למודל, לקחנו את אותו גורם ה"הפרעה" אשר יצר את חוסר ההתאמה למודל בתרחיש לעיל והזזנו אותו על פני שמונה מיקומים שונים באזור קווי התקשורת. באיור 4.4 ניתן לראות את הביצועים הממוצעים של המשערכים כאשר ציר ה-x הוא אינדקס המיקום השונה, ניתן לראות למעשה שבכל אחד מהמיקומים השונים המשעריך ה-RML ידע להתעלם מהמדידה אשר אינה מתאימה למודל ושעריך נאמנה את השדה. עוד ניתן להבחין כי תחת חוסר התאמה למודל משעריך ה-ML מראה לרוב ביצועים פחות טובים מאשר ביצועי משעריך ה-NML. ניתן לייחס זאת להבנה כי משעריך זה נותן עדיפות למדידות פחות סבירות כפי שראינו בתת

פרק 2.2 ולכן הוא מתחשב באופן משמעותי יותר במדידה שאינה מקיימת את המודל מכיוון שהיא מאוד לא סבירה והוא משנה את ערך הפרמטרים על מנת לשפר את סבירותה. בטבלה 4.2 מוצגים הביצועים הממוצעים עבור שמונת המיקומים השונים של גורם ההפרעה. ערכי הסף  $\alpha$  כמובן השתנו עבור התרחישים השונים ונבחרו עפ"י האלגוריתם הדינמי, כך שתווד הערכים שהתקבל עבור התרחישים היה:  $10^{-10} < \alpha < 10^{-119}$ .

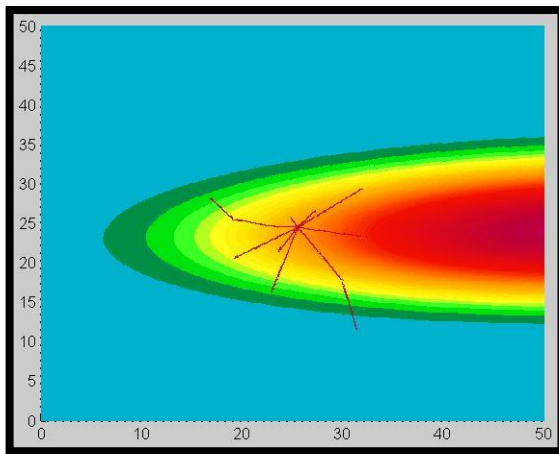
טבלה 4.1

ביצועי המשערכים עבור המקרה המתואר באיור 4.3

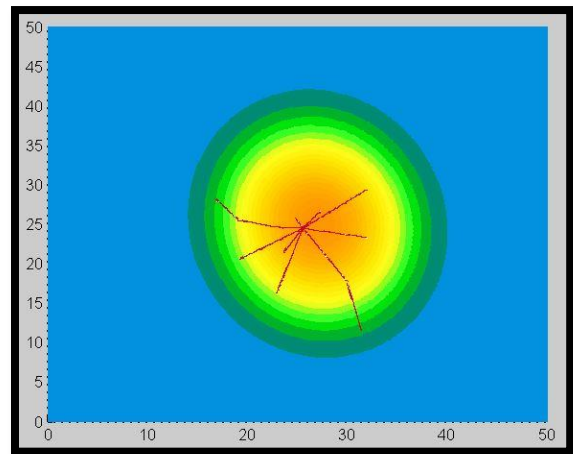
שערוך RML	שערוך ML	שערוך NML	NRMSE
0.4818	7.5977	7.0837	



(א)



(ג)



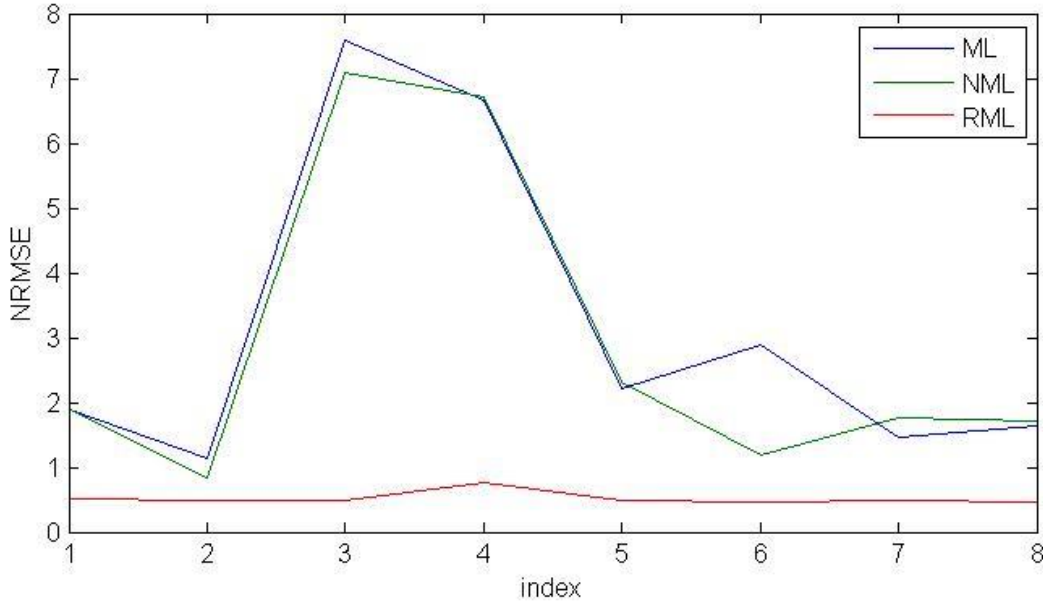
(ב)

איור 4.3 בתת איור (א) מוצג השדה ה"אמיתי". בתת איור (ב) מוצג השדה האופייני כפי ששערך אותו משערך ה-RML, כאשר ערך הסף  $\alpha = 10^{-21}$  נבחר עפ"י האלגוריתם הדינמי. בתת איור (ג) מוצג השדה המשוערך האופייני מתוך משערכי ה-ML, NML

4.2 טבלה

ביצועי המשערכים עבור המקרה המתואר באיור 4.4

שערוך RML	שערוך ML	שערוך NML	
0.52	3.18	2.93	NRMSE



איור 4.4 ביצועי המשערכים עבור מיקומים שונים של גורם ה"הפרעה", כאשר ציר ה-X מסמן את אינדקס המיקום.

בתרחיש הבא רצינו לא רק לשנות את מיקום גורם ה"הפרעה" אלא גם את צורתו: גובהו רוחבו וזוויתו ע"מ לוודא שהאלגוריתם לבחירת  $\alpha$  אינו גורם למשערוך ה-RML לפסול מדידות אמינות. הגרלנו צורות שונות של גורם ההפרעה, כלומר הגרלנו את הפרמטרים עבור גאוסין ההפרעה (גובהו, מיקומו, רוחבו, וכיוונו) וחישבנו את ממוצע ביצועי המשערכים עבור ההפרעות השונות, בטבלה 4.3 ניתן לראות כי הביצועים הממוצעים של המשערוך ה-RML הם הטובים ביותר, בנוסף נציין כי לא קרה מקרה בו ביצועי המשערוך ה-RML היו פחות טובים ממשערוך ה-ML. היו לא מעט מקרים שהאלגוריתם לבחירת  $\alpha$  בחר את ערכה לאפס ולכן המשערכים התלכדו ובשאר המקרים בהם נבחר ערך אחר של  $\alpha$  ביצועי משערוך ה-RML היו טובים יותר. דבר זה נבע כמובן מתוך הבחירה המחמירה של הפרמטרים לבחירת  $\alpha$ , בעיקר  $N_\alpha = 2$ . היו לא מעט מקרים בהם גורם ההפרעה יצר חוסר התאמה למודל אצל מספר עורקים גדול יותר ממגבלה זו, ולכן לא ניתן היה לבחור  $\alpha$  שיפסול יותר מ-2 עורקי תקשורת.

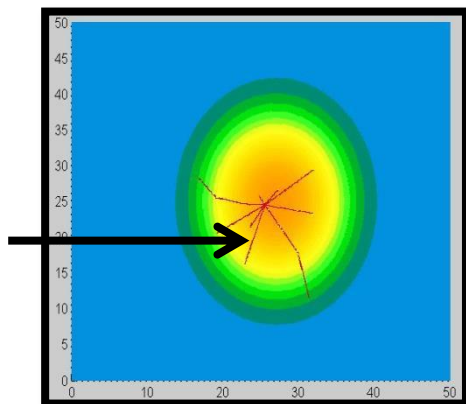
4.3 טבלה

ביצועי הממוצעים על פני מיקומים שונים וצורות שונות של גורם ההפרעה

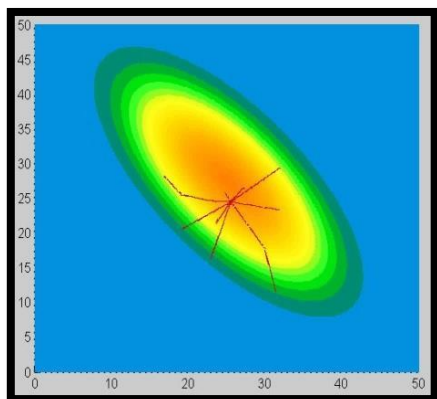
שערוך RML	שערוך ML	שערוך NML	
2.55	2.88	2.95	NRMSE

התרחיש הבא שרצינו לבחון הוא כאשר קו תקשורת סורה, כלומר קו תקשורת מראה מדידה אפס למרות שבפועל הוא היה אמור לחוש שדה גשם באזורו. קו התקשורת שסורה הוא קו התקשורת המסומן בחץ שחור. ניתן לראות מתוך איור 4.5 כי משערוך ה-RML משחזר באופן יפה את השדה ולמעשה מתעלם ממדידה זו, בעוד שאר המשערכים מייחסים לה

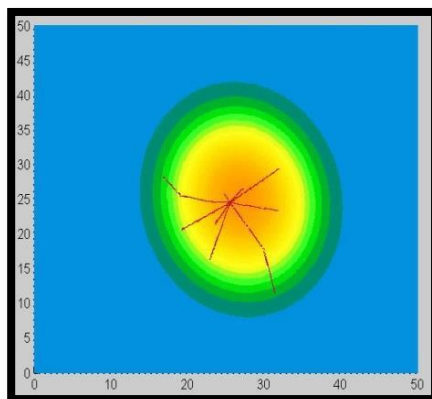
חשיבות רבה. מתוך טבלה 4.4 ניתן לראות את כי השגיאה של משעריך ה-RML משמעותית נמוכה מהשאר. כאשר NRML זה שורש השגיאה הריבועית הממוצעת מנורמלת בערך הגשם האמתי הממוצע. ערך הסף נבחר באופן דינמי  $\alpha = 10^{-580}$ .



(א)



(ב)



(ג)

איור 4.5 תת איור (א) השדה ה"אמיתי", כאשר קו תקשורת הסורח מסומן בחץ שחור וערך המדידה עבורו אפס. תת איור (ב) השדה המשוערך מתוך משעריך ה-RML ערך הסף  $\alpha = 10^{-580}$  נבחר עפ"י האלגוריתם הדינמי. תת איור (ג) השדה המשוערך האופייני מתוך משעריך ה-ML וה-NML.

רצינו להרחיב את ההתבוננות על המקרה של קווים סורחים ולמעשה בטבלה 4.5 מוצגים ביצועי המשערכים הממוצעים כאשר כל פעם קו אחר מתוך קווי התקשורת סרח, כלומר מדידתו הראתה אפס למרות ששדה הגשם השרה עליו נחות שאינו אפס. ניתן לראות כי ביצועי משעריך ה-RML טובים יותר בסדר גודל משאר המשערכים, עוד ניתן לראות שעבור מקרים אלו משעריך ה-ML הראה ביצועים טובים יותר מאשר משעריך ה-NML.



4.4 טבלה

ביצועי המשערכים עבור המקרה המתואר באיור 4.5

שערוך RML	שערוך ML	שערוך NML	
0.122	1.3	1	NRMSE

4.5 טבלה

ביצועי השערכים הממוצעים עבור מיקומים וצורות שונים של גורם ההפרעה

שערוך RML	שערוך ML	שערוך NML	
0.13	1.05	1.4	NRMSE

#### 4.5 סיכום

בפרק זה הראנו את רגישות המשערכים הרגילים ML, NML למצבים בהם המודל אינו מתאר נאמה את המציאות. תיארונו שני סוגים של חוסר התאמה למודל: חוסר התאמה של שדה הגשם למודל הפרמטרי וחוסר התאמה בתיאור הקשר בין השדה לאופי החישה של הסנסור. הראנו מדוע המשערכים נסחפים לכיוון המדידות אשר אינן סבירות מבחינת המודל, הראנו זאת דרך פונקציות המחיר של כל משערך. מתוך הבנה זו פיתחנו משערך בעל פונקציית מחיר הגורמת להתעלם ממדידות שאינן סבירות עבור שום וקטור פרמטרים של המודל קראנו למשערך זה - RML. משערך זה רובסטי לחלק מהמקרים בהם קיימת חוסר התאמה למודל. משערך זה צפוי לשפר באופן משמעותי את ביצועי השערך בעיקר כאשר כמות מעטה של מדידות אינן מקיימות את המודל בעוד ששאר המדידות מקיימות. משערך זה תלוי בפרמטר  $\alpha$  אשר קובע את סף הסבירות, הראנו כיוונים שונים של בחירת ערך סף סבירות זה ואף פיתחנו אלגוריתם לשיטה דינמית לבחירתו כתלות בנתונים. הראנו סימולציות הממחישות את שני הסוגים של חוסר התאמה למודל. ביצועי משערך ה-RML שהצענו היו טובים באופן משמעותי ממשערכי ה-ML, NML עבור שני סוגי תרחישים אלו.

## 5 נתוני אמת

בפרק זה נענינו לאתגר של יישום המודל הפרמטרי הגאוסי ושערוך הפרמטרים באמצעות שלושת המשערכים שהצגנו בעבודה (ML, NML, RML) על אפליקציית מיפוי שדות גשם. יישום זה הציב מספר אתגרים שאיתם לא התמודדנו בשלב התיאוריה ובשלב הסימולציה, בניהם: חישוב קו האפס, סנכרון זמנים, התחשבות באנטנה רטובה, קביעת סדר מודל שעל כל אחד מהם נרחיב בהמשך.

יישום המודל הפרמטרי על אפליקציית מיפוי שדות גשם מקנה יתרונות רבים בהם יכולת מיפוי רחבה ביחס לכמות ומיקום המדידות, יכולת שילוב בין קווי התקשורת החשים באופן שונה את שדה הגשם (לכל קו תקשורת תדר עבודה אורך ומיקום שונים) בצורה אופטימלית, יכולת שילוב בין רשתות שונות (אשר מאופיינות בתדרי עבודה ורזולוציית קוונטיזציה שונים), יכולת שילוב סנסורים שונים כגון מדידי גשם ומכ"מ. גישה פרמטרית מכילה גם חסרון במידה והמציאות אינה מתאימה למודל. לצורך מזעור חסרון זה פיתחנו את משעריך ה-RML. הסברנו את המוטיבציה למשעריך זה ואף הראנו תוצאות סימולציה המראים עדיפות מובהקת למשעריך זה בתרחישים מסוימים של חוסר התאמה למודל. בפרק זה נבחן את ביצועי משעריך זה במבחן המציאות. לצורך שימוש במשעריך ה-RML נדרשנו לקבוע את ערך סף הסבירות  $\alpha$ , בעבודתנו בחרנו לעבוד עם האלגוריתם הדינמי לבחירת ערך זה. ע"מ לבחור באופן דינמי את ערך הסף נדרש לקבוע שני פרמטרים:  $N_\alpha, L_{const}$  נרחיב על בחירת פרמטרים זו עבור תוצאות האמת בהמשך.

בפרק זה השתמשנו בנתוני עוצמות הקליטה והשידור של רשת התקשורת האחורית של חברות הסלולר- סלקום ופלאפון. נתונים אלו נשמרו במאגרי חברות הסלולר למטרות תחזוקה שוטפת ועל כן אופי חסכוני בשמירת הנתונים, הן בהיבט הדגימה הזמנית והן בהיבט הקוונטיזציה. מכיוון שנתונים אלו משמשים שימוש פנימי כל חברה אימצה אופי שמירת נתונים שונה הנבדל ברמות קוונטיזציה ואופי הדגימה הזמני, כפי שיפורט בהמשך.

מטרת פרק זה היא להראות יישום של המודל ושיטות השערוך השונות שפיתחנו בחלקים השונים על אפליקציית מיפוי שדות גשם, כאשר הסנסורים החשים את השדה הם קווי התקשורת של חברת סלקום ופלאפון אשר להם מאפיינים שונים: תדרי עבודה, אורכי הקו ורזולוציית הקוונטיזציה.

עבודה עם נתוני אמת של רשתות הסלולר תהיה בדיקת שפיות להנחות המודל שביצוענו עבור תרחיש מציאותי בו השדה הפיזיקלי הוא שדה גשם, בנוסף עבודה זו תראה התכנות למיפוי שדות גשם באמצעותו. חשוב לציין כי פרק זה אינו באוריינטציה מטרולוגית ואין מטרתו לטעון כי הדרך הנכונה ביותר למדל שדה גשם זה באמצעות שדה פרמטרי גאוסי.

### 5.1 רקע על הנתונים:

הרשת האחורית של חברות הסלולר משמשת להעברת נתונים מתחנות הבסיס אחת לשנייה בתקשורת נקודה אל נקודה על בסיס קו ראייה, רשת זו מתאפיינת בעבודה בתדרים גבוהים, בתדרים אלו ניחות האות בתווך כאמור מושפעת משדה הגשם. ברשת האחורית של חברת פלאפון המשדר משדר בעוצמה קבועה והקליטה מושפעת מתופעות הערוץ, בעוד שברשת סלקום המשדר משנה את עוצמת השידור על בסיס עוצמות הקליטה המתקבלות בקצה השני. אופי שידור שונה זה מצריך אופי שונה של שמירת נתונים בחברות הסלולר. בחברת פלאפון נשמרו עוצמות הקליטה של תחנת הקליטה בלבד ברזולוציית קוונטיזציה של 1[DB] וברזולוצייה זמנית של דקה, בעוד שבחברת סלקום נשמרים ארבעה נתונים של מקטעים בעלי רבע שעה: מקסימום ומינימום של עוצמות הקליטה והשידור. רזולוציית הקוונטיזציה של חברת סלקום היא 0.1[DB]. נשים לב כי פעולת סלקום אינה מאפשרת להסתכל על רזולוציה זמנית מכיוון שהפעולה של שמירת ערכי

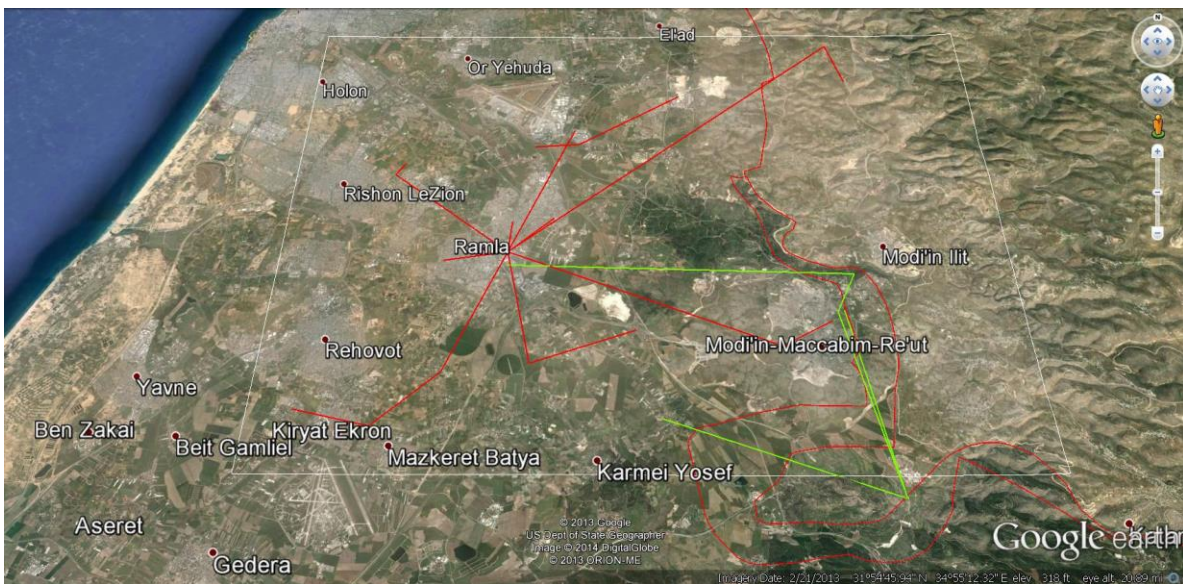
הקצה במקטע של רבע שעה שונה במהותה מהסתכלות רגעית בזמן בהפרשים קבועים כפי שנעשה ברשת פלאפון. סיכום אופי הנתונים מוצג בטבלה 5.1.

### 5.1 טבלה

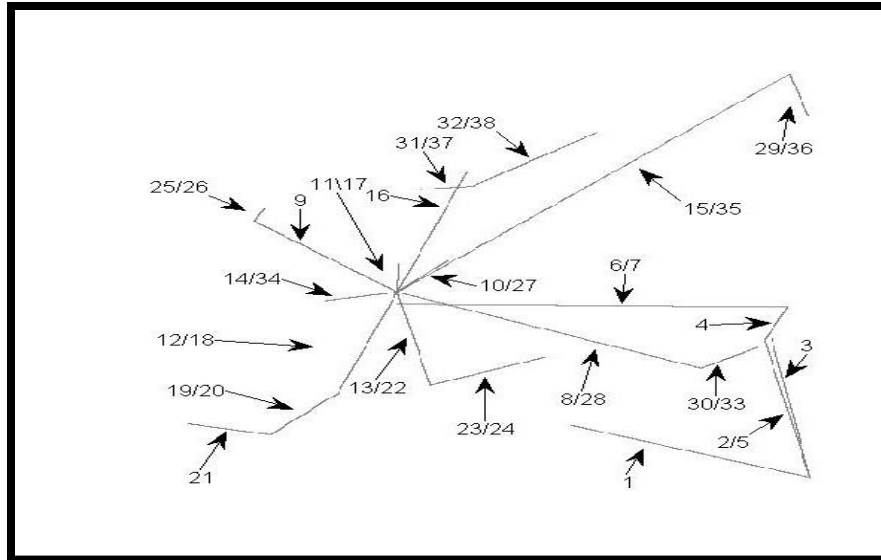
אופי הנתונים המתקבלים מחברות הסלולר פלאפון וסלקום

סלקום	פלאפון	רזולוציית קוונטיזציה
0.1 [DB]	1 [DB]	אופי זמני
מקטעי רבע שעה	כל דקה	ייצוג הערך
עוצמות מינמום ומקסימום של שידור וקליטה	דגימה רגעית	

באיור 5.1, מוצגת הפריסה המרחבית של קווי התקשורת באזור רמלה תא שטח הכולל של  $30 \cdot 30$  [km<sup>2</sup>]. סה"כ 38 קווי תקשורת שחלקם יושבים באותו מיקום גאוגרפי והן חלק מעורק כפול. באיור 5.2 אנחנו מגדרים מספרים לקוי התקשורת לצורך שפה משותפת להמשך הפרק.



איור 5.1 פריסת קווי תקשורת באזור רמלה של רשת פלאפון (הקווים המסומנים באדום) וסלקום (הקווים הצבועים בירוק)



איור 5.2 מספרי קווי התקשורת לצורך שפה משותפת.

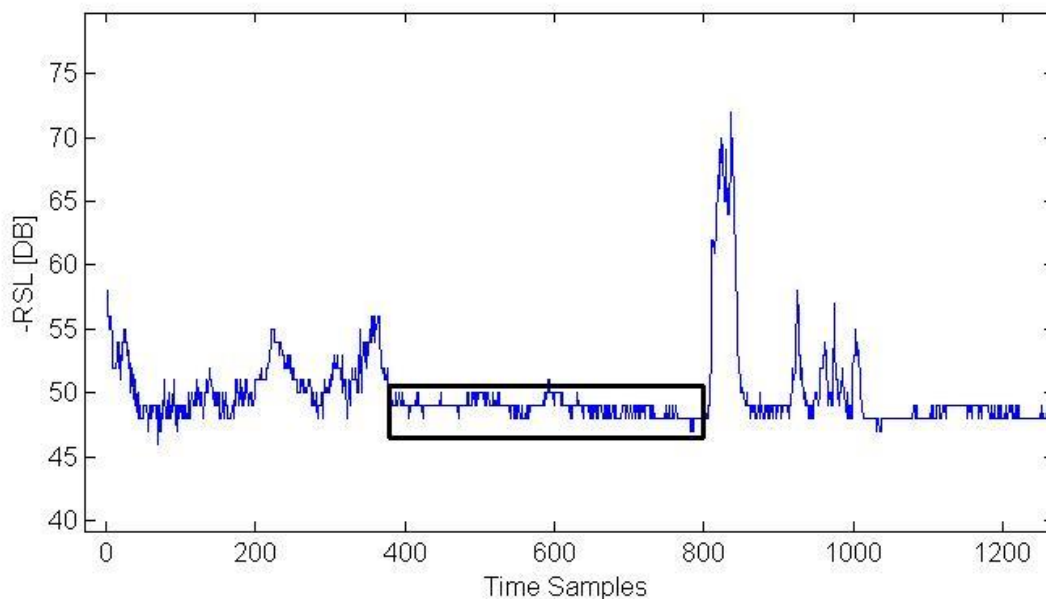
## 5.2 עיבוד הנתונים

כפי שנכתב בהקדמה לפרק זה, ע"מ ליישם את המודל ואת שיטות השערוך עבור אפליקציית מיפוי גשם נדרש לבצע עיבוד על הנתונים הגולמיים כפי שמתקבלים מרשתות הסלולר לטובת התאמתם למודל שפיתחנו. מטרת פרק זה לפרט את הפעולות שנדרש לבצע על נתונים אלו כתהליך מקדים לתהליך השערוך. מכיוון ששדה הגשם גורם לניחות בעוצמות האות נדרש ראשית לחלץ את עוצמת הניחות מתוך הנתונים. שנית בשל האופן הזמני השונה של שתי הרשתות נרצה לסנכרן נקודות זמן שנוכל למפות נקודה רגעית בזמן. תופעת נוספת שנדרש להתייחס אליה היא תופעת "אנטנה רטובה", שדה גשם הנמצא מעל קו תקשורת לרוב מרטיב את אנטנות השידור והקליטה, תופעה אשר גורמת לניחות נוסף שאינו מתקבל מתוך המודל המקשר בין שדה גשם לניחות.

חלק מקדים זה אינו בליבת עבודתנו ונעשה לטובת עבודה עם נתוני אמת, הגישות בחלק זה אינן טוענות לאופטימליות והן דרך אחת מבין רבות ונעשו מתוך שיקולים מעשיים.

### 5.2.1 חישוב רמת האפס

לצורך חישוב הניחות מתוך נתוני עוצמות הקליטה והשידור יש להגדיר עבור כל קו תקשורת את "רמת האפס" (zero-level) המגדירה עוצמת הקליטה הנומינלית ממנה ייחשב ערך הניחות. עבודות רבות נעשו סביב קביעת רמת האפס ([40], [41], [42], [43]) כולן מתבססות על ידע זמני של קו התקשורת ומוצעות דרכים שונות לשערך את רמה זו. לצורך עבודתנו חישובנו את רמת האפס להיות הממוצע הפשוט של הזמנים המייצגים מקטע יבש לפני מקטע הגשם. הגדרת הזמנים היבשים נעשה מתוך התבוננות במדידה הזמנית של הקו. באיור 5.3 מוצגת עוצמות הקליטה של קו תקשורת מסי 15 לאורך מרבית היממה, ניתן לראות בברור כי החלק המסומן במלבן יכול להיחשב כאזור יבש וממנו ניתן לחשב את קו האפס עבור אירוע הגשם שמתרחש בדגימה 800 ואילך.



איור 5.3 מינוס עוצמות הקליטה - RSL של קו תקשורת פלאפון מס' 15, ב [DB]. ציר ה-x נטול יחידות ומייצג את אינסוף הדגימה ביממה.

חילוץ נתון הניחות מתוך קווי התקשורת של סלקום מצריך התייחסות מיוחדת, שמירת ערכי הקצה של עוצמות השידור והקליטה במקטע זמן של רבע שעה מקשים למעשה על ההבנה הרגעית של עוצמות השידור והקליטה, באופן תיאורטי ייתכן ואין לנו ידע על שום עוצמת ניחות רגעית, אך לצורך עבודתנו יצאנו מנקודת הנחה כי ערכי הקיצון מייצגות שתי נקודות ניחות רגעיות - האחת ניחות מקסימלית והשנייה ניחות מינימלית. נקודת הניחות המקסימלית הוגדרה להיות הפער בין השידור המקסימלי לקליטה המינימלית, יש היגיון להניח כי שתי נקודות קיצון אלו (שידור מקסימלי וקליטה מינימלית) מתקיימות בזמן רגעי אחד כאשר ישנו אירוע אשר מנחית את עוצמת הקליטה באופן משמעותי כפי שקורה באירוע גשם. סביר לחשוב כי בזמן זה הקליטה היא מינימלית ואנטנת הקליטה מאותת למשדר להגביר את הספקו עד שזה מעלה את הספקו למקסימום, אך הקליטה המתקבלת עדיין תהיה המינימלית. נקודת הניחות המינימלית תוגדר כשידור מינימלי וקליטה מקסימלית, שוב גם במקרה זה יש היגיון שתופעה זו מתקיימת בנקודה רגעית אחת, כאשר אין הפרעות מיוחדות בערוץ הקליטה מקסימלית והמקלט מאותת למשדר לשדר במינימום הספק. כעת ניתן להסתכל על שתי מדידות אלו באופן נפרד ולהסתכל על ההשתנות הזמנית של כל אחת מהמדידות ולקבוע את רמת האפס עבור כל סוג מדידה עפ"י קטעי עבר כפי שעשינו במקרה של סלקום. למעשה עבור נתוני סלקום הגדרנו שתי רמות אפס שונות אחת עבור נקודת המקסימום והשנייה עבור נקודת המינימום, ניחות של כל אחד מהמדידות יחושב באופן נפרד מתוך רמת האפס המתאימה לסוגו.

## 5.2.2 סנכרון זמנים

בשל האופי הזמני השונה של נתוני סלקום ופלאפון נדרש לבצע סנכרון זמנים, כלומר להביאם לשפה זמנית משותפת. תחת ההנחה שמדידות רשת סלקום מייצגות שתי נקודות רגעיות בזמן בכל מקטע של רבע שעה, הדרך הנכונה לסנכרן היא להבין מתי זמנים אלו התקיימו על בסיס כל המידע הקיים. על מנת למצוא את זמנים אלו השתמשנו בנתוני רשת פלאפון המעודכנים כל דקה ובאמצעותם הבנו את אופי התקדמות השדה. ברגע שהייתה לנו הבנה על אופי התקדמות השדה במקטע של רבע שעה יכולנו להגדיר מתי התרחשה נקודת המינימום ומתי נקודת המקסימום עבור כל קו

תקשורת של סלקום. כלומר מתי כל קו תקשורת של סלקום חש את שדה הגשם המקסימלי ומתי את המינימלי. מתוך כך ברור כי אם נסתכל על רגע בודד בו נרצה לבצע שערורך אחוד של רשת פלאפון עם רשת סלקום, לא נוכל להשתמש בכל קווי התקשורת של רשת סלקום מכיוון שישנם זמנים אשר אין בהם ייצוג זמני לערכי המדידה. (הרי לכל קו תקשורת הוגדרו שתי נקודות רגעיות בתוך רבע שעה שלמה).

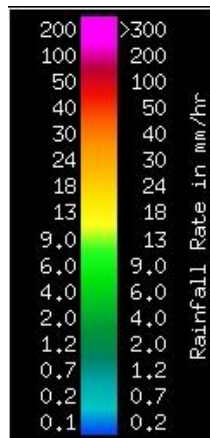
את אופי התקדמות השדה הסקנו מתוך ערכי הגשם הממוצעים (במובן מרחבי) שחש כל קו תקשורת של פלאפון בכל דקה בתוך מקטע של הרבע שעה. את ערך הגשם חישבנו על בסיס הקשר ההפוך בין ניתוח עוצמת התקשורת לגשם כפי שמתואר במשוואה (5.1).

$$(5.1) \quad R_i = \left( \frac{A_i}{a_i L_i} \right)^{\frac{1}{b_i}}$$

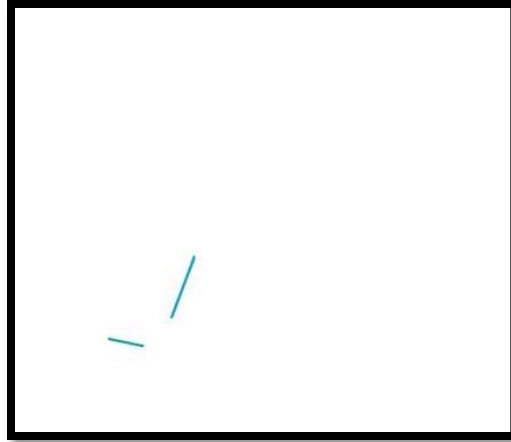
כאשר R מייצג את ערך קצב הגשם ביחידות של [mm/h] ו A הוא ערך הניחות ביחידות של [DB]. ו a, b הם קבועי ה-Power low המשתנים בין לינק ללינק ו L הוא אורך הקו תקשורת.

לדוגמא באיור 5.5 ניתן לראות שחזית הגשם מגיעה מדרום מערב לכיוון צפון מזרח. ננתח כדוגמא את נקודת המינימום והמקסימום של קווי התקשורת של סלקום 6/7 שנמצאים בחלק המרכזי (כפי שניתן לראות באיור 5.2). ניתן לראות כי סביר שנקודת המינימום התרחשה ב- 14:20. תת איור (א), שנקודת המקסימום בזמן 14:30 תת איור (ג). את זמן 14:25 תת איור (ב) נגדיר כזמן נטרלי בו לא התרחשה שום נקודת מדידה מבחינת קו תקשורת זה ולכן לא נתחשב בזמן זה בלינק זה.

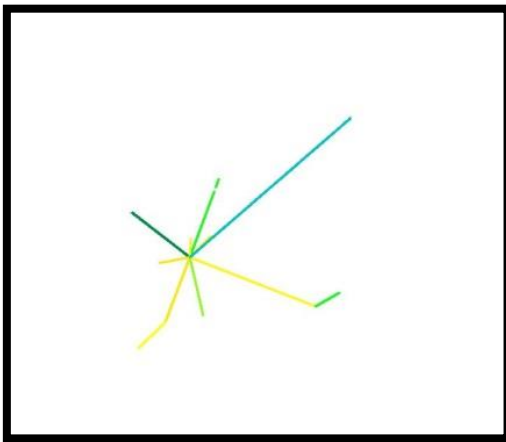
בחלק התיאורטי ובחלק הסימולציה של עבודה זו לא דנו כלל בסוגיה הזמנית, למעשה הסתכלנו על רגע בודד בזמן. מסיבה זו, סנכרון הזמנים בין הרשתות השונות נעשה כפתרון אד-הוק המאפשר באופן מהיר, ללא הכנסות מעמיקה לסוגיית הזמנים, לעבוד עם תוצאות האמת. נושא סנכרון הזמנים הוא נושא רציני בפני עצמו ונכון להרחיב את המודל למודל זמני בעבודות המשך.



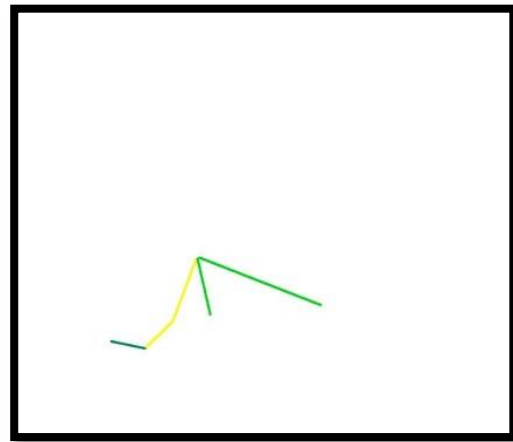
איור 5.4 סקלת הצבעים הקושרת בין צבע לערך גשם.



(א)



(ב)



(ג)

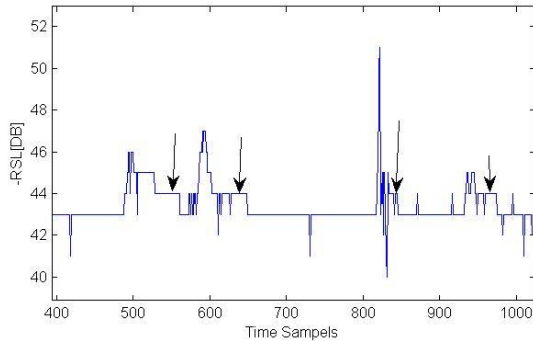
איור 5.5 ערכי הגשם הממוצעים עבור קווי פלפאון בזמנים עוקבים. איור (א) 13:20, איור (ב) 13:25, איור (ג) 13:30. הצבעים מייצגים את הגשם עפ"י סקלה של צבעים המוצגת באיור 5.4. קווי תקשורת עם ערך גשם אפס אינם מוצגים כלל.

### 5.2.3 אנטנה רטובה

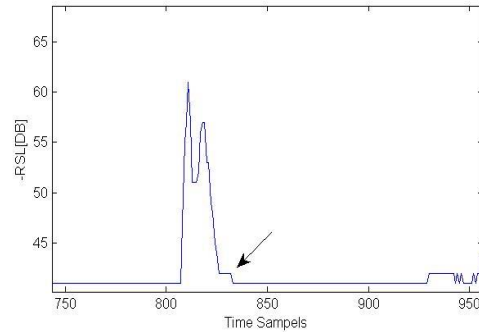
כאשר יורד גשם באזור של קו תקשורת הוא עלול לייצר ניחות נוסף הנקרא "אנטנה רטובה". תופעה זו מתקיימת כאשר אנטנה אחת או שתייהן נרטבות, רטיבות זו מייצרת ניחות הנוסף על הניחות הידוע מקשר ה-power low המתאר את ניחות האות בתווד. תופעה זו ידועה בספרות [44], [45], [46]. ב-[47] הוצע מודל זמני להשפעת אנטנה רטובה על ניחות קו התקשורת, כאשר בתחילת אירוע גשם ישנה השפעה הולכת וגדלה המאופיינת על ידי פונקציית לוג, ובסיום אירוע גשם ישנה השפעה הולכת ופוחתת המאופיינית על ידי פונקציית אקפוננט דועך. בעבודה הוצג חסם מקסימלי על השפעת אנטנה רטובה כ-2 [DB].

לצורך עבודתנו ע"מ להוריד אפקט של תופעה זו הורדנו באופן גורף 2 [DB] מכל ערך של ניחות על מנת לקזז את אפקט זה. איור 5.6 ממחיש תופעה זו בצורה טובה, ניתן לראות בקטעים המסומנים בחץ כי אחרי כל אקט גשום (בו מובחן

פיק גבוה) ישנו משך זמן שבו נשארת עוצמת ניחות קבועה ואז יורדת. תופעה זו תואמת את תופעת אנטנה רטובה אשר דועכת כמספר דקות לאחר חלוף הגשם. התבוננות זו גרמה לנו להבין כי גם בזמן הגשם ישנה תופעה של אנטנה רטובה ואנו צריכים לקזז תופעה זו.



(ב)



(א)

איור 5.6 מינוס עוצמות הקליטה (RSL) ב [DB] של קווי התקשורת של חברת פלאפון כציר הזמן (אינדקס דגימות ביממה). תת איור (א) קו תקשורת מספר 31. תת איור (ב) קו תקשורת מספר 27.

גם עבור הטיפול בנושא אנטנה רטוב אין עבודה זו טוענת לאופטימליות. עבור עבודות המשך ניתן לבצע התבוננות מעמיקה יותר בתופעה זו ולהכניסה כחלק מהמודל לטובת השערוך.

### 5.3 עיבוד התוצאות

על מנת לבחון את תוצאות המשערכים אל מול השדה הגשם ה- "אמיתי" נשווה את תוצאות השערוך מול נתוני מכ"מ גשם כפי שהתקבלו בשרות המטרולוגי. דוגמא לתמונה מלאה של מכ"מ גשם ניתן לראות באיור 5.7.

ההשוואה מול מכ"מ מתבצעת בשלוש רמות: רמה ויזואלית, ע"י הצגת תמונת המכ"מ מול תוצאות המשערוך, חישוב ערך קורולציה הדו ממדית בין ערכי הגשם המתקבלים במכ"מ לערכי הגשם המתקבלים בשערוך, וחישוב השגיאה הריבועית הממוצעת בין ערכי הגשם של שתי השיטות.

נזכיר כי גם ליכולות המכ"מ במיפוי הגשם חסרונות והוא אינו בהכרח מראה את תמונת המציאות נאמנה, בנוסף המרת תמונת המכ"מ לערכי גשם בעייתית בשל סקאלה גסה בערכי גשם גבוהים ונושא סנכרון הזמנים גם כן יכול לפגוע ביכולת ההשוואה. אך בראייתנו זה הכלי הנכון ביותר לבצע מולו השוואה מרחבית רחבה.

מתוך איור 5.4 ניתן לראות כי רזולוציית ערכי הגשם ביחס לצבעים המוצגים היא סקאלה לוגריתמית אשר בטבעה בעלת רזולוציה משתנה והולכת ונהיית גסה יותר ככל שערוך הגשם עולה. ניתן לשים לב כי עבור ערך של 50 עד 100 [mm\h] ייוצג על ידי אותו הצבע. עובדה זו מקשה עלינו לבחון את ביצועי המשערכים באופן המקובל שעבדנו בחלק הסימולציה במובן השגיאה הריבועית לכן נציע דרך נוספת לבחינת ביצועי המשערכים אשר פחות מושפעת מערכי השדה אלא מצורתו, בחינה זו היינה בחינת הקורלציה.

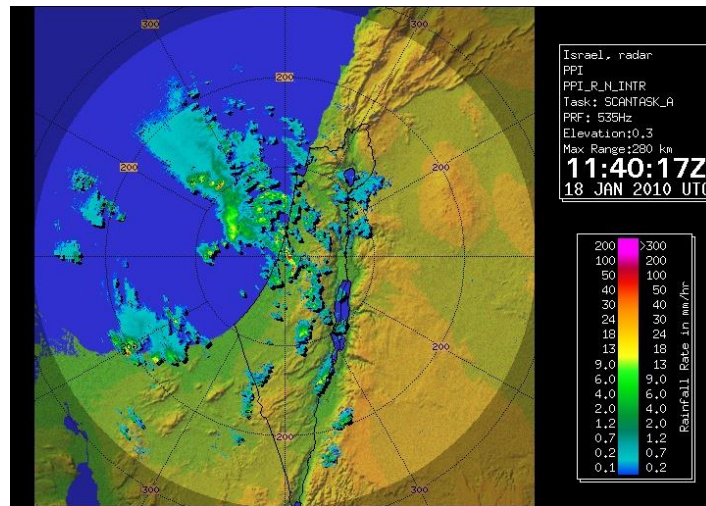
על מנת לחשב את הקורלציה ואת המרחק הריבועי בין ערכי הגשם המרנו לערכי גשם עפ"י סקאלת הגשמים המוצגת בצדו הימני של האיור וקיבלנו מטריצה של ערכי גשם מתוך תמונת המכ"מ. את מטריצת ערכי הגשם מתוך המשערוך חישבנו על ידי הצבת הפרמטרים המשוערכים בשדה הגשם המשוערוך וחישוב ערכי הגשם הממוצעים לשטח הגאוגרפי



אותו מייצג פיקסל בתמונת המכ"מ. מכיוון שערכי המכ"מ בעלי רזולוציה מרחבית נמוכה (בערך ק"מ בריבוע), ביחס לרצף מרחבי בערכי הגשם מתוך השדה המשוערך, בצענו ממוצע מרחבי של ערכי הגשם המשוערכים לאותו רזולוציה כפי שמתואר במשוואה (5.2). חישוב ערך הקורלציה  $\rho_{corr}$  מופיע מתואר במשוואה (5.4) וחישוב המרחק הריבועי SD מתואר במשוואה (5.3).

$$(5.2) \quad R_{est}(i, j) = \frac{1}{A} \iint_{x, y \in A_{ij}} f(x, y; \hat{\theta}) dx dy$$

כאשר  $R_{est}(i, j) \left[ \frac{mm}{h} \right]$  היינו ערך הגשם הממוצע בתחום  $A_{ij} [km^2]$  זה גודל שטח רזולוציית המכ"מ.



איור 5.7 תמונת מכ"מ גשם כפי שהתקבלה בשרות המטרולוגי בתאריך 18.1.2010 בשעה 13:40. (יש לשים לב כי השעון המוצג באיור הוא בזמן utc)

$$(5.3) \quad SD = \sqrt{\frac{\frac{1}{N_i N_j} \sum_{i,j} (R_{est}(i, j) - R_{radar}(i, j))^2}{\bar{R}_{radar}}}$$

כאשר SD הוא שורש המרחק הריבועי הממוצע עפ"י כל נקודות המטריצה בין ערכי הגשם מנורמל בערך הגשם הממוצע עפ"י המכ"מ.  $R_{radar}(i, j) \left[ \frac{mm}{h} \right]$  הוא ערך הגשם שהתקבל לאחר המרת תמונת המכ"מ לערך גשם,  $N_i, N_j$  הם גודל המטריצה שורות ועמודות בהתאמה.

$$(5.4) \quad \rho_{corr} = \frac{\sum_{i,j} (R_{est}(i, j) - \bar{R}_{est}) \cdot (R_{radar}(i, j) - \bar{R}_{radar})}{\sqrt{\sum_{i,j} (R_{est}(i, j) - \bar{R}_{est})^2 \cdot \sum_{i,j} (R_{radar}(i, j) - \bar{R}_{radar})^2}}$$

כאשר  $\bar{R}_{est}$  ו  $\bar{R}_{radar}$  הם הממוצע הפשוט של ערכי המטריצות  $R_{est}$  ו  $R_{radar}$  בהתאמה.

נציין כי מבחינה טרמינולוגית לא נקרא לשורש המרחק הריבועי הממוצע SD בין תמונת המשערך לתמונת המכ"מ שגיאה ריבועית מכיוון שערך הגשם המתקבל מהמכ"מ אינו בהכרח ערך הגשם האמיתי בשל חסרונות מובנות מתוך יכולות המכ"מ ובשל יכולת ההמרה המופחתת.

#### 5.4 קביעת ערך סף הסבירות $\alpha$

לצורך שימוש במשערך ה-RML נדרש לקבוע את ערך סף הסבירות  $\alpha$ . ערך זה יקבע אילו מדידות יעמדו בתנאי הסבירות ויילקחו בחשבון בפעולת השערך של משערך ה-RML. על נושא ערך זה פרטנו בהרחבה בתת הפרק 4.3 ואף בחנו אופן בחירת ערך זה בסימולציות בתת פרק 4.4.

בעבודה עם תוצאות האמת נרצה לבחור את ערך  $\alpha$  באופן דינמי כתלות בערכי המדידות. משמעות הדבר כי עבור כל אירוע שייבחן נגדיר ערך אחר של  $\alpha$ . האלגוריתם הדינמי לבחירת ערך סף זה מתואר בהרחבה בתת פרק 4.3, עבור אלגוריתם זה ישנו שני פרמטרים הנדרשים לקביעה:  $N_\alpha, L_{const}$ . כאשר  $N_\alpha$  מייצג חסם לבחירת ערך הסף כך שלא תתאפשר אי עמידה של יותר מ-  $N_\alpha$  מדידות בתנאי הסבירות. ערך ה-  $L_{const}$  קובע את יחס עליית הסבירות הנדרש עבור המדידות המקיימות את תנאי הסבירות, רק במידה ויחס העלייה גדול מיחס זה ערך  $\alpha$  יהיה שונה מאפס, פרמטר זה מפורט במשוואה (4.8).

השיקול המוביל בבחירת ערכים אלו הוא שכל המדידות המקיימות את המודל יקיימו את תנאי הסבירות, כלומר איננו רוצים שיהיו מדידות המכילות אינפורמציה אמינה לגבי המציאות אשר לא נלקחו בחשבון במשערך ה-RML. בנוסף נרצה כמובן שמדידות אשר אינן מקיימות את המודל לא יקיימו את תנאי הסבירות, אך זה יהיה שיקול שני. מתוך שיקולים אלו נבחר את ערך הפרמטר  $N_\alpha = 2$ . הרעיון בבחירה זו היא כי אנו מאמינים כי אם יהיה חוסר התאמה למודל משיקולי קו סורח אז לא סביר כי זה יקרה ליותר משתי קווי תקשורת באותו האירוע, אם חוסר ההתאמה ינבע מתוך שדה שאינו תואם את השדה הגאוסית אנו מניחים כי זה יהיה באזור מצומצם, הנחה זו לא בהכרח חייבת להתקיים אך בכל מקרה משערך ה-RML עשוי לשפר את הביצועים בעיקר בתרחישים בהם חוסר התאמת המודל מתקיימת עבור כמות מעטה של מדידות.

קביעת ערך פרמטר  $L_{const}$  יותר סבוכה, בשל סדרי העדיפויות שהגדרנו לעיל אנו רוצים שערך זה ייצג שיפור משמעותי בסבירות המדידות המקיימות את תנאי הסבירות, על מנת לא לפסול מדידות המקיימות את תנאי הסבירות. נשאלת השאלה מה זה "משמעותי"? נזכיר כי ההיגיון שעומד מאחורי פרמטר זה במידה והתקיימו מדידות אשר אינן יקיימו את המודל הן יהיו מאוד לא סבירות, פעולת משערך ה-ML תגרום לשאר המדידות להיות פחות סבירות, מכיוון שהווקטור המשוערך מתחשב במדידה הלא סבירה כך ש-  $L(\tilde{z}; \hat{\theta}_{ml}) < L(\tilde{z}; \hat{\theta}_{ml})$  כאשר  $\tilde{z}$  זה וקטור המדידות אשר מקיימות את תנאי הסבירות. כלומר, אנו צופים כי הסרת המדידות שאינן מקיימות את תנאי הסבירות תעלה את סבירות המדידות הקיימות את תנאי הסבירות באופן משמעותי.

לצורך מענה לשאלה "כמה זה משמעותי"? נקבע את ערך  $L_{const}$  מתוך התבוננות בתוצאות כל אירועי השערוך. כלומר, עבור כל אירוע בתוצאות האמת נבחן את יחס השיפור  $L_{delta}$ , נזכיר כי: 
$$L_{delta} = \frac{L(\bar{z}; \hat{\theta}_{rml}) - L(\bar{z}; \hat{\theta}_{ml})}{L(\bar{z}; \hat{\theta}_{ml})}$$
 את יחס השיפור הזה נבחן עבור ערך ה- $\alpha$  הראשון בו היו מדידה אחת או שתיים (בשל מגבלת  $N_\alpha = 2$ ) לא עמדו בתנאי הסבירות. נקדים את המאוחר ונכתוב פה כי היו מתוך עשרת האירועים שבחנו, היו שלושה אירועים בהם יחס השיפור עמד על מעל 0.2, ושאר האירועים היחס עמד על פחות מ-0.04. לכן מתוך הבדל מובהק זה, ובחיזוק תוצאות הסימולציה בתת פרק 4.4 אשר הראו כי עבור יחס הפחות מ-0.12 ישנם מקרים של אי עמידה בתנאי הסבירות של מדידות המקיימות את המודל, בחרנו את ערך הסף  $L_{const} = 0.2$ . אם לדוגמא היינו בוחרים ערך  $L_{const}$  נמוך מידי לדוגמא 0.02 היינו מקבלים כי בכל אירוע יש חוסר התאמה למודל, הנחה זו מסוכנת ואינה עומדת בקנה אחד עם השיקול שאיננו רוצים לגרום למדידות אשר מקיימות את המודל לא לעמוד בתנאי הסבירות.

## 5.5 תוצאות אמת

בחלק זה נציג את רצף התוצאות אמת מיום ה-18.01.2010 בשעות 14:05-20:13 סה"כ כעשרה אירועים. מכיוון שאין התחשבות זמנית בעבודתנו, כל אירוע עומד בפני עצמו ולמעשה אנו בוחנים עשרה אירועים בעלי אופי שונה כפי שנראה בהמשך. סמיכות האירועים מהווה יתרון משום שהיא מאפשרת התבוננות ביכולת המשערכים לתפוס חזית העוברת את תא השטח. חשוב לציין כי חלון זה נבחר מכיוון שיש בו שילוב של נתונים משתי הרשתות, תמונות מכ"מ וגשם באזור העניין. עבור כל אירוע נציג את תמונת ערכי הגשם הממוצעים כפי שחשו קווי התקשורת, ערכי גשם אלו יוצגו כקווים עם צבעים כערכי הגשם הממוצעים באופן דומה לצורה בה הצגנו באיור 5.5. חשוב לציין שערכים ממוצעים אלו הן לצורך המחשה בלבד, אך לא נעשה בהן שום שימוש, לצורך השערוך השתמשנו במדידות עצמן (ערך הניחות) כאמור וביצענו את המשערכים כפי שהוצגו בחלקים הקודמים. בנוסף, נציג את תמונת המכ"מ עבור אזור העניין באופן מוגדל כאשר על תמונת המכ"מ יוצגו קווי התקשורת איתם בוצע השערוך. בנוסף נציג את השדות המשוערכים של המשערכים השונים, במידה ואין שוני רב בין המשערכים נציג את התוצאה האופיינית. בנוסף נציג טבלה המסכמת את ערכי הקורלציה ושורש המרחק הריבועי הממוצע המנורמל בין תמונת השדה המשוערך לתמונת המכ"מ. נציג את ביצועי המשערכים אשר עבדו עם רשת פלאפון בלבד וללא נתוני קווי רשת סלקום על מנת לוודא שהוספת רשת סלקום אינה גרעה מביצועי המשערכים, ואם היא גרעה לנסות להבין מדוע.

עוד נציין כי בחלק מהאירועים כאשר נתבונן בתמונת הגשמים הממוצעים של קווי התקשורת, ניתן יהיה לראות בברור כי לשדה הגשם יותר משיא גובה אחד, מצב כמובן שגאוס אחד אינו יכול לתאר. נזכיר כי בעבודתנו עד כה הנחנו ידיעה מלאה של המודל ולא דנו בסוגיה של בחירת סוג או סדר מודל. בשל כך, המקרים בהם החלטנו לחפש שני גאוסים ולא אחד נבחרו בשיטה מעשית שכמובן אינה טוענת לאופטימליות. בחרנו לקבוע האם לשערך גאוס אחד או שניים על פי כמות שיאי הגובה כפי שהתקבלו מתמונת ערכי הגשם הממוצעים של קווי התקשורת. כאשר שיא יוגדר כערך גשם הגבוהה מבין שכיניו.

לא בכל אירוע יכולנו להשתמש בכל קווי התקשורת של רשת סלקום, כפי שהסברנו בחלק סנכרון הזמנים 5.2.2 חלק מהאירועים הוגדרו כניטרליים, בכל אירוע קווי התקשורת שבאמצעותם בוצע השערוך יופיעו על תמונת המכ"מ.

בפרק זה בחירת ערך ה- $\alpha$  עבור משערך ה-RML נעשה באופן דינמי כפי שהוסבר בהרחבה בתת פרק 4.3 עבור ערכי הסף  $N_\alpha = 2, L_{const} = 0.2$ , את השיקולים בבחירה ערכים אלו תיארו בהרחבה בתת הפרק 5.4, עבור כל אירוע נציין את ערך ה- $\alpha$  שנבחר.

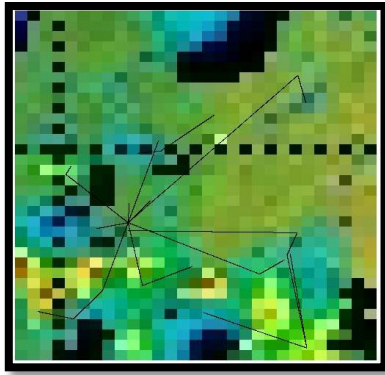
באיור 5.8 ניתן להתרשם מביצועי המשערכים בשעה 13:20. מתוך תמונת ערכי הגשם הממוצעים של קווי התקשורת, כפי שמוצג בתת איור (ג) ניתן להבחין באופן מובהק בשני שיאים, בחלק המזרחי ובחלק המערבי ובניהם קווי תקשורת אשר אינם חשים בשדה הגשם. בשל מובהקות חלוקה זו ביצענו חיפוש של שני גאוסיינים נפרדים. חילקנו את קווי התקשורת לשתי קבוצות מזרח ומערב וביצענו שיעור נפרד עבור כל גאוסין. מתוך תת איור (א) ניתן להתרשם שמבחינת צורות השיעור התקבלו תוצאות יפות, אך ישנו פספוס בעוצמות השיעור בעיקר עבור הגאוס המערבי. תופעה זו מוכרת לנו מתוך הבנת התיאוריה ומתוך התבוננות בתוצאות השיעור עבור השדה בפרק הסימולציה לדוגמא באיור 3.5, כאשר בחנו שדה גשם שהוא מרוחק ממרכז השטח "הנאחז" ע"י קווי התקשורת. ניתן להתרשם שבמקרה זה עבור החלק המערבי למעשה כמות אינפורמציה לגבי שדה הגשם מוגבלת מכיוון שרק שני קווי תקשורת חשים אותו. כמובן שגם עצם העובדה שקווי תקשורת אינם חשים את שדה הגשם מספקת אינפורמציה על השדה, אך אינפורמציה זו משרתת בעיקר את צורת הגאוסין ומיקומו אך הגובה נקבע על בסיס עוצמות החישה.

מכיוון שעבור שיעור של כל גאוסין ישנם קווי תקשורת מעטים ביותר שחשים את השדה ערך ה- $\alpha$  נבחר להיות אפס ועל כן משערכי ה- RML, ML התלכדו. מתוך טבלה 5.2 ניתן לראות את התוצאות המספריות של המשערכים. ניתן לראות כי ערכי הקורלציה דיי דומים בין המשערכים השונים, מכיוון שלמעשה כל גאוסין משוער כמעט ע"י קווי תקשורת רשת אחרת. בנוסף, ניתן להתרשם שכאשר שיערכנו את השדה ללא שימוש בקווי תקשורת של רשת סלקום הקורלציות של המשערכים ירדו, כצפוי. למעשה ללא שימוש בקווי תקשורת של סלקום שוער רק הגאוסין המערבי, מכיוון שלא היו קווי תקשורת לשיעור של הגאוסין המזרחי. ביצועי המרחק הריבועי נשארו כמעט זהים במקרה בו עבדנו ללא רשת סלקום וזה בשל חוסר ההתאמה בגובה הגאוסין הימני כאשר הוא שוער. מכיוון שבאירוע זה שיערכנו שני גאוסיינים נפרדים כאשר לכל גאוסין כמות מעטה של קווי תקשורת החשים את שדה הגשם הגדרנו את ערך הסף  $\alpha = 0$ , מכיוון שלא היה לנו את "הפריווילגיה" לא להשתמש בחלק מהמידות.

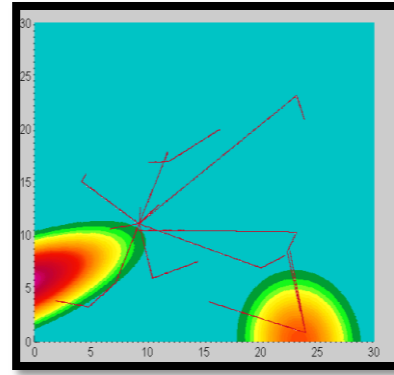
5.2 טבלה

ביצועי המשערכים עבור זמן 13:20

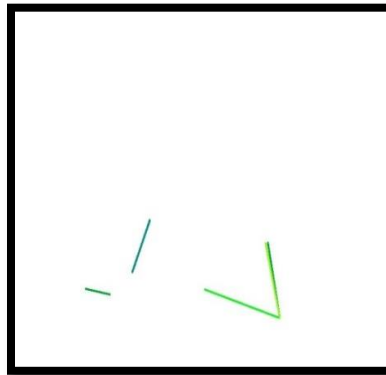
ללא סלקום		עם סלקום		
$\rho$	SD	$\rho$	SD	
0.4408	3.501	0.5238	3.58	NML
0.4421	3.54	0.5268	3.54	ML
0.4421	3.54	0.5268	3.54	RML



(ב)



(א)



(ג)

איור 5.8 תת איור (א) השדה משוערך אופייני לשלושת המשערכים. תת איור (ב) תמונת המכ"מ של אזור העניין בשעה 13:20 עם פריסת כל קווי התקשורת שנעשה בהם שימוש לטובת השערוך. תת איור (ג) ערכי הגשם הממוצעים כפי שחושבו מתוך נתוני הניחות של קווי התקשורת. נזכיר כי רמות הכחול והתכלת בתמונת המכ"מ מייצגות רמות גשם נמוכות מאוד (פחות ממ"מ בודד בשעה).

מאיור 5.9 ניתן להתרשם מביצועי המשערכים בשעה 13:25. באירוע זה קווי התקשורת של סלקום בחלקו המזרחי לא נכנסו לשערוך מכיוון שזמן זה הוגדר כזמן נטרלי (ניתן להתבונן בקווים על תמונת המכ"מ בשביל להתרשם אילו קווי תקשורת נלקחו בחשבון) ועל כן חיפשנו גאוסייך בודד.

באירוע זה ניתן לראות שיש הבדל בין השדות המשוערכים. מתוך תמונת המכ"מ ניתן לראות כי קו התקשורת המכיל את העורק הכפול 8/28 (המסומן בחץ שחור) למעשה חש גשם שאינו חלק משדה הגשם בחלקו המערבי של אזור העניין. אם נתייחס למודל שדה הגשם כגאוס, קו תקשורת כפול זה חש שדה שאינו מתאים לגאוסייך באזור זה. משערך ה-RML למעשה לא השתמש במדידות של העורק הכפול 8/28 בפעולת השערוך מכיוון שמדידותיו היו מאוד לא סבירות, כלומר לא עברו את סף הסבירות  $\alpha$  שנקבע באופן דינמי (יפורט בהרחבה בהמשך). מתוך התבוננות בערכי הגשם הממוצעים שחשו קווי התקשורת בתת איור (א) מתוך איור 5.9, ניתן לראות כי אכן הייתה אמורה להתקבל דעיכה בקו תקשורת כפול זה ולמעשה היינו צופים לראות אותו בצבע כחול. ניתן לראות כי פסילת קווי תקשורת זו הובילה למשערך נכון יותר הן בהיבט ויזואלי והן מבחינה קורלציה כפי שניתן לראות בטבלה 5.3, אומנם אין הסכמה לכך במובן של המרחק הריבועי אך הרחבנו על חסרונותיו בחלק עיבוד התוצאות 5.3.

באירוע זה נבחר ערך ה-  $\alpha$  עפ"י האלגוריתם הדינמי אשר קבע  $\alpha = 10^{-120}$ . ערך זה העלה את פונקציית ה-likelihood בכחמישים אחוזים, כלומר  $L_{\text{delta}} = 0.5 > L_{\text{const}} = 0.2$  עבור המדידות שעמדו בתנאי הסבירות.

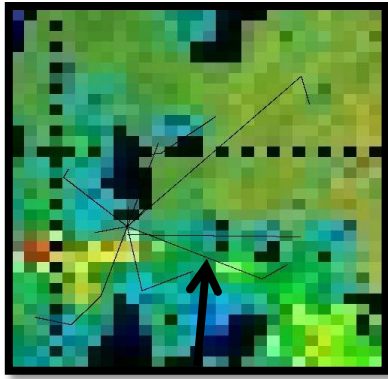
נזכור כי בחלק זה לא השתמשנו בקווי תקשורת סלקום בפינה הימנית תחתונה ועל כן מתוך האינפורמציה שיש מקווי התקשורת נראה כי משערך ה-RML מראה תוצאות טובות.

כאשר לא עבדנו עם קווי תקשורת של סלקום למעשה לא עבדנו עם קו התקשורת בעל העורק הכפול 6/7 אשר כיוונו מזרח-מערב, ערוך כפול זה אומנם לא חש גשם אך עצם הסרתו שינתה את תמונת הסבירות למצב בו ה-RML אינו יכול לפסול עוד את 8/28. ולמעשה שלושת המשערכים במקרה זה יצאו דומים וזהים לזה שמוצג באיור 5.9 בתת איור הימני תחתון. ניתן לראות כאמור שביצועי המשערך ה-RML מבחינת קורלציה ירדו.

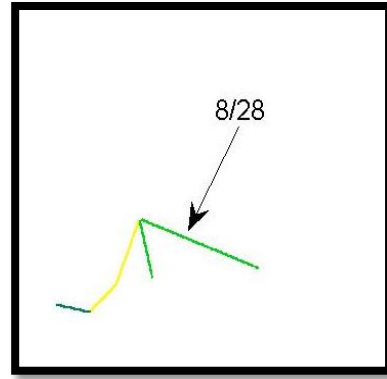
5.3 טבלה

ביצועי המשערכים עבור זמן 13:25

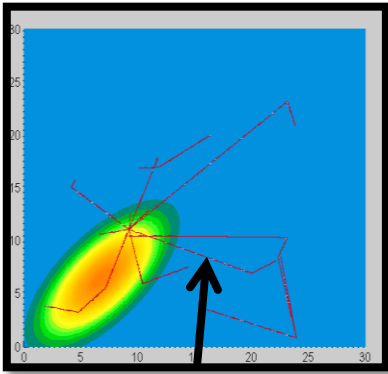
ללא סלקום		עם סלקום		
$\rho$	SD	$\rho$	SD	
0.2436	2.24	0.2274	2.24	NML
0.2548	2.229	0.2366	2.32	ML
0.2548	2.229	0.4319	3.39	RML



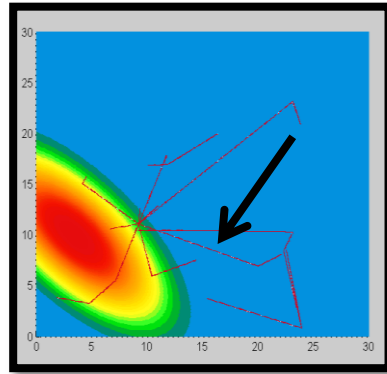
(ב)



(א)



(ד)



(ג)

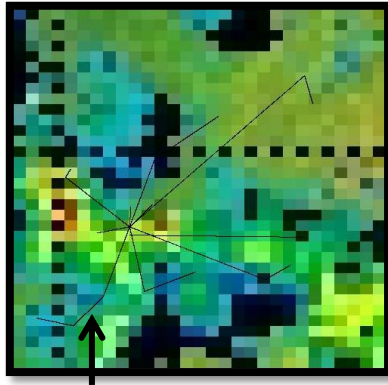
איור 5.9 תת איור (א) ערכי הגשם הממוצעים כפי שחושבו מתוך נתוני הניחות של קווי התקשורת. תת איור (ב) תמונת המכ"מ של אזור העניין בשעה 13:25 עם פריסת כל קווי התקשורת שנעשה בהם שימוש לטובת השערך. תת איור (ג) השדה המשוערך מתוך משערך RML. תת איור (ד) השדה המשוערך האופייני למשערכי ML וה NML. נזכיר כי רמות הכחול והתכלת בתמונת המכ"מ מייצגות רמות גשם נמוכות מאוד (פחות ממ"מ בודד בשעה). החצים מציינים את קו התקשורת הכפול 8/28.

**5.5.3 13:30**

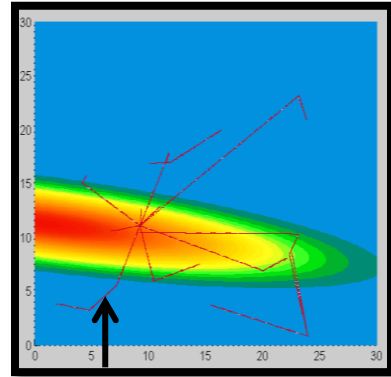
מאיור 5.10 ניתן לראות את ביצועי המשערכים בשעה 13:30. ניתן לראות כי ישנו זיהוי יפה של שיא הגובה וכן מרבית אזור הגשם הנצפה במכ"מ מכוסה ע"י הגאוסין. מתוך טבלה 5.4 ניתן לראות כי במקרה זה גם הקורלציות וגם המרחק הריבועי הסכימו עם ההתאמה, נשים לב כי ביצועי המשערך ירדו כאשר לא הכנסנו את קווי תקשורת של רשת סלקום לתהליך השערך.

עוד חשוב לציין כי עבור ערך סף  $\alpha = 10^{-230}$  משערך ה-RML זיהה את קו התקשורת הכפול 19/20 (קו התקשורת הדרומי ביותר הצבוע צהוב ומסומן בחץ שחור), כחסר התאמה ופסל אותו בשערך. גם עפ"י תמונת המכ"מ ניתן לראות שהגשם בקו תקשורת זה אינו נובע מהגוש המערבי המרכזי. אך בשל התאמה חזקה של שאר המדידות שערך ה-RML למעשה היה זהה לשערך ה-ML. כלומר ערך סף הסבירות  $\alpha = 10^{-230}$  לא שיפר כלל את הסבירות של המדידות.

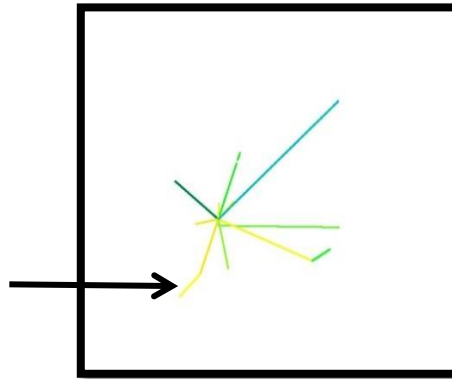
ולמעשה לא עמד בתנאי של שיפור יחס הסבירות מכיוון שעבור מקרה זה  $L_{\Delta} = 0 < L_{const} = 0.2$  ולכן נבחר ערך  $\alpha = 0$ .



(ב)



(א)



(ג)

איור 5.10 תת איור (א) שדה משוערך אופייני לשלושת המשערכים. תת איור (ב) תמונת המכ"מ של אזור העניין בשעה 13:30 עם פריסת כל קווי התקשורת שנעשה בהם שימוש לטובת השערך. תת איור (ג) ערכי הגשם הממוצעים כפי שחושבו מתוך נתוני הניחות של קווי התקשורת. החצים השחורים מציינים את הקו התקשורת בעל העורק הכפול 19/20. נזכיר כי רמות הכחול והתכלת בתמונת המכ"מ מייצגות רמות גשם נמוכות מאוד (פחות מ"מ בודד בשעה)

5.4 טבלה

ביצועי המשערכים עבור זמן 13:30

ללא סלקום		עם סלקום		
$\rho_{corr}$	SD	$\rho_{corr}$	SD	
0.32	2.34	0.457	2.09	NML
0.32	2.34	0.45	2.09	ML
0.32	2.34	0.45	2.09	RML



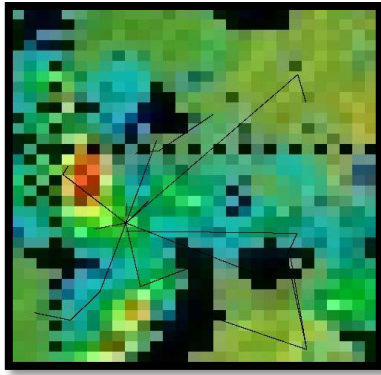
מאיור 5.11 ניתן לראות התאמה יפה של מיקום ועוצמות שיא הגובה של תמונת המכ"מ לגאוסין המשוער. צורתו גאוסין המשוער מעט מוארכת ביחס לתמונת המכ"מ, עובדה שנובעת מקווי התקשורת הדרומיים, ניתן לראות שערכי הגשם הממוצעים אינם מתאימים לתמונת המכ"מ אלא גבוהים יותר, ייתכן שחוסר סנכרון זמנים גרם לכך. בנוסף ניתן לראות כי קו התקשורת 19 (פונה מעלה לכיוון צפון מזרח) חש גשם גבוהה יותר מאשר תמונת המכ"מ, גם עובדה זו מרמזת על בעיית סנכרון קלה בזמנים, סביר כי החזית עלתה מעט צפונה באופן שגם קו התקשורת 19 חש ברמה גבוהה יותר של גשם וגם הלינקים הדרומיים חשו את הגוש הדרומי שעלה מעט צפונה. ניתן לראות שביחס לערכי הגשם הממוצעים כפי שמוצגים בתת איור (ג) הגאוסין מתאר התאמה יפה וסביר לחשוב שתמונת קווי התקשורת נכונה יותר עבור זמן מדידתה, מבחינת כיוון ומיקום הגאוסין סביר כי המציאות תואמת את הגאוסין המשוער בעוד שהגאוסין מוארך יתר על המידה ככל הנראה בשל ההפרעה הדרומית. עוד ניתן לראות במקרה זה כי קו התקשורת הכפול של סלקום 6/7 (פונה מזרח מערב) חש גשם שאינו נובע מהגוש המרכזי ולמעשה מהווה חוסר התאמה למודל הגאוס. קו תקשורת כפול זה אינו נפסל ע"י משערך ה-RML, מכיוון שעפ"י האלגוריתם הדינמי נבחר ערך ה- $\alpha = 0$ . בחירה זו נעשתה מכיוון שעבור ערך של  $\alpha = 10^{-90}$  קו מקרוגל 34 אינו מקיים את תנאי הסבירות, אך מכיוון שכמעט לא עלתה הסבירות עבור המדידות המקיימות את תנאי הסבירות:  $L_{const} = 0.2 > L_{delta} = 0.03$  נבחר ערך הסף  $\alpha = 0$ .

ניתן לראות בטבלה 5.5 כי ללא קווי תקשורת סלקום ביצועי המשערכים טובים יותר, הן מבחינת הקורלציה והן מבחינת מרחק ריבועי. נתון זה מסתדר עם העובדה שקו התקשורת 6/7 של סלקום למעשה מביא אינפורמציה שגויה לשערך מבחינת המודל הגאוס. אין להתייחס למקרה זה כמקרה מייצג כפי שנראה בהמשך זה מקרה פרטני בו התעלמות ממדידות קווי תקשורת סלקום עוזרת לשערך, ניתן לייחס זו לאמרה כי "גם שעון מקולקל צודק פעמיים ביממה".

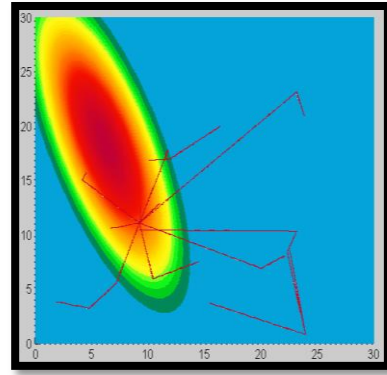
5.5 טבלה

ביצועי המשערכים עבור זמן 13:35

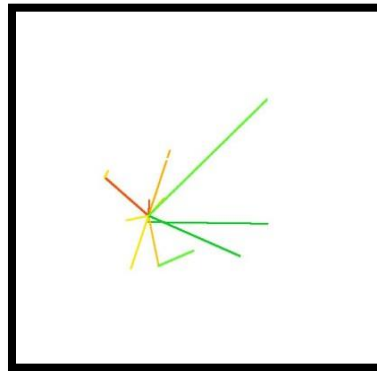
ללא סלקום		עם סלקום		
$\rho_{corr}$	SD	$\rho_{corr}$	SD	
0.4495	4.68	0.4336	5	NML
0.465	4.371	0.435	4.93	ML
0.465	4.371	0.435	4.93	RML



(ב)



(א)



(ג)

איור 5.11 תת איור (א) שדה משוערך אופייני לשלושת המשערכים. תת איור (ב) תמונת המכ"מ של אזור העניין בשעה 13:35 עם פריסת כל קווי התקשורת שנעשה בהם שימוש לטובת השערך. תת איור (ג) ערכי הגשם הממוצעים כפי שחושבו מתוך נתוני הניחות של קווי התקשורת. נזכיר כי רמות הכחול והתכלת בתמונת המכ"מ מייצגות רמות גשם נמוכות מאוד (פחות ממ"מ בודד בשעה).

#### 5.5.5 13:40

מאיור 5.12 ניתן לראות מתוך ערכי הגשם הממוצעים של קווי התקשורת כי ישנם שני שיאי גובה, בחלק הדרומי (קווי תקשורת 23/24) ובחלק הצפוני (קווי תקשורת 16), כפי שעשינו באירוע 13:20 חילקנו את קווי התקשורת לשניים, במקרה זה לצפון ודרום וביצענו שערך בנפרד בכל אזור עבור גאוס בודד. כעת בניגוד למקרה של 13:20 במקרה זה הגאוסיינים דיי קרובים אחד לשני וברור כי חלוקה לא אופטימלית זו יכולה להיות גסה מידי, ולייצר שטח חפיפה שאינו תואם את מדידות קווי התקשורת בשטח החפיפה. למצוא שנים עשר פרמטרים שהם למעשה שני גאוסיינים המתאימים ביותר לכל קווי התקשורת היא משימת חישוב מאוד לא פשוטה. נזכיר כי בשלושת המשערכים נדרש למצוא נקודת מינימום גלובלית לפונקציית המחיר עבור אותו משערך. ישנם שיטות רבות איטרטיביות למציאת נקודות מינימום אך כולן מתכנסות לנקודת מינימום לוקלית. בשל אופי פונקציות המחיר של המשערכים ישנם נקודות מינימום לוקליות רבות מאוד, ולכן שיטת החיפוש תצריך רמה כזו או אחרת של סריקה, סריקה עבור 12 פרמטרים היא משימה מאוד לא פשוטה, אפילו אם נרצה לחפש עשרה ערכים מתוך כל פרמטר נגיע לסדר גודל של  $10^{12}$ . בשל קושי זה חיפשנו את נקודת המינימום הלוקלית שהיא סביב וקטור התחלתי מסוים (בעל 12 ערכים במקרה שלנו). בחרנו את וקטור ההתחלה להיות הערכים של שני הגאוסיינים כפי ששוערכו כאשר חילקנו את המרחב לצפון ודרום, את הווקטור הלוקלי שנמצא מתוך

וקטור ההתחלה הכתרנו להיות המשערך. ברור כי תוצאה זו אינה מבטיחה למצוא את המינימום הגלובלי, אך בעניינו היא נכונה יותר מאשר למצוא שני גאוסניים בנפרד והיא פשוטה יותר לחיפוש מאשר לחפש באופן עיוור את נקודת המינימום.

כעת נתבונן בתוצאות המשערכים, ניתן לראות באופן ויזואלי הן מבחינת הגאוס הצפוני והן מבחינת הדרומי, כי שלושת השדות המשוערכים מראים התאמה יפה לתמונת המכ"מ. ניתן אף להבחין כי השערך שבוצע באמצעו ה- ML, RML הוא מתאים יותר לתמונת המכ"מ. כמו כן אפשר לראות כי עפ"י ערכי הטבלה 5.6 כי משערכי ה- ML, RML נתנו תוצאה טובה יותר מאשר משערך ה- NML הן מבחינת הקורלציה והן מבחינת השגיאה הריבועית. באופן כללי ניתן להתרשם שערכי הקורלציה הם גבוהים מאוד ומייצגים התאמה יפה בין תמונת השערך לתמונת המכ"מ.

ניתן לראות באמצעות שערך הגאוס הדרומי את ההבדל בין התייחסות המשערכים השונים למדידות. נזכר כי משערך ה- ML מעניק חשיבות גבוהה יותר לקווי התקשורת של סלקום מאשר משערך ה- NML בשל היותם בעלי רזולוציית קוונטיזציה גבוהה יותר. לכן הגאוסין הדרומי בזווית כזו אשר מתרחקת מקווי התקשורת של סלקום מכיוון שאלו מדווחים כי אין גשם באזורים.

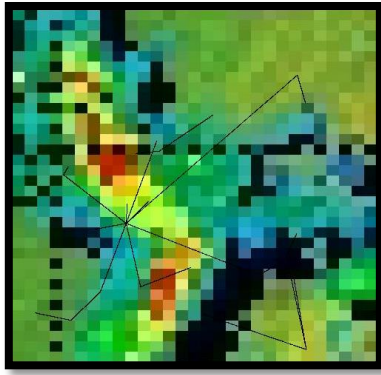
באירוע זה נבחר באופן דינמי ערך  $\alpha = 0$ , משום שעבור  $\alpha = 10^{-30}$  נפסלו קווי מיקורגל: 32/38 אך כמעט ולא נצפה שיפור בסבירות המדידות המקיימות את תנאי הסבירות  $L_{const} = 0.2 < L_{delta} = 0.03$  ולכן נבחר  $\alpha = 0$ .

בנוסף ניתן לראות שהתעלמות מקווי התקשורת של רשת סלקום הרעו את ביצועי המשערכים כצפוי.

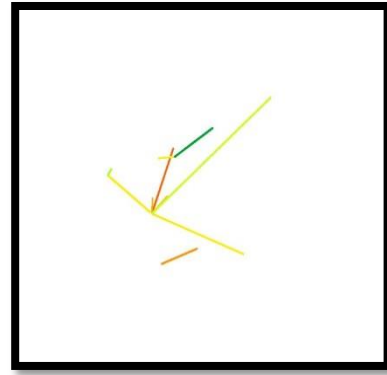
5.6 טבלה

ביצועי המשערכים עבור זמן 13:40

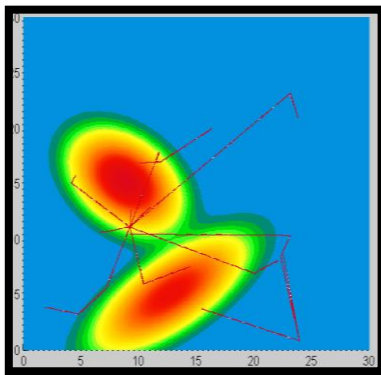
ללא סלקום		עם סלקום		
$\rho_{corr}$	SD	$\rho_{corr}$	SD	
0.65	2.64	0.7	1.67	NML
0.66	3.31	0.75	1.43	ML
0.66	3.31	0.75	1.43	RML



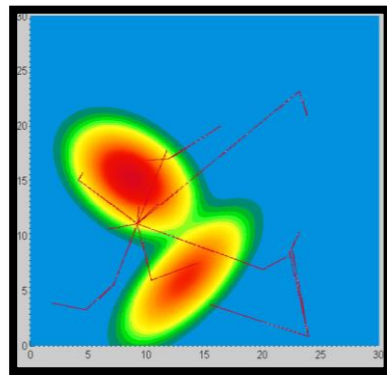
(ב)



(א)



(ד)



(ג)

איור 5.12 תת איור (א) ערכי הגשם הממוצעים כפי שחושבו מתוך נתוני הניחות של קווי התקשורת. תת איור (ב) תמונת המכ"מ של אזור העניין בשעה 13:40 עם פריסת כל קווי התקשורת שנעשה בהם שימוש לטובת השערך. תת איור (ג) השדה המשוערך האופייני מתוך משערכי ה-ML וה- RML. תת איור (ד) מוצג השדה המשוערך מתוך משעריך ה- NML. נזכיר כי רמות הכחול והתכלת בתמונת המכ"מ מייצגות רמות גשם נמוכות מאוד (פחות ממ"מ בודד בשעה).

### 5.5.6 13:45

מאיור 5.13 ניתן לראות מתוך ערכי הגשם הממוצעים של קווי התקשורת כי ישנם שני שיאי גובה, כפי שמוצגים בתת איור (א), בחלק הדרומי (23/24) ובחלק הצפוני (16) בדומה לאירוע בשעה 13:40. פעלנו באופן דומה לאופן בו פעלנו ב-13:40 וביצענו את השערך בשני שלבים, בשלב הראשון חילקנו את המרחב לשתי קבוצות של קווי תקשורת, צפון ודרום ושערכנו שני גאוסיינים נפרדים, בשלב השני ביצענו שערך משותף של שני גאוסיינים מתוך כלל קווי התקשורת סביב ערכי הפרמטרים שמצאנו בשלב א'. במקרה זה ניתן להבחין בשוני בין שלושת המשערכים. משעריך ה- RML פסל את קווי התקשורת 31 (אשר מסומן בחץ שחור בתת איור (ה)), מדידה זו הראתה ניחות אפסי אשר אינה סבירה (לא עברה את סף הסבירות  $\alpha$  אשר בחירתו תפורט בהמשך). בניגוד למקרה עבר בו משעריך ה- RML פסל קווי תקשורת אשר חשו גשם שאינו התאים למודל הגאואסי במקרה זה ככל הנראה עורק זה היינו עורק סורח, שבשל תקלה טכנית אינו אמין. ניתן להתרשם מכך מתוך העורק הצמוד לו מתוך איור 5.14 ניתן לראות את עוצמות הקליטה של העורק הכפול ברגע דגימה 825 שזו השעה 13:45. ניתן לראות שבעוד שבעורק 37 נראה בפיק המתאים לאירוע גשם עורק 31 אינו חש דבר. כמובן שהתבוננות בודדת על עורק כפול זה אינה מאפשרת לקבוע מי מבניהם צודק, אך התבוננות רחבה על כל המדידות ומגוון

צורות הגאוס האפשריות, כפי שעושה משערך ה-RML, מאפשרת לקבוע כי לינק זה סורח ואין להתייחס בו בתהליך השערך.

פסילת עורק 31 אפשרה למשערך ה-RML לבצע את שערך המתאים ביותר לתמונת המכ"מ בשלושת המובנים, הויזואלי, הקורלציה והשגיאה הריבועית (כפי שניתן להתרשם מטבלה 5.7). ניתן לראות שבשל המדידה הסורחת של עורק 31 הגאוסייין הצפוני במשערך ה-ML צר יותר ונוטה יותר לכיוון דרום ע"מ להתרחק מעורק זה. הגאוסייין הצפוני של משערך ה-NML גם כן צר יותר ואף נמוך יותר מאותה הסיבה.

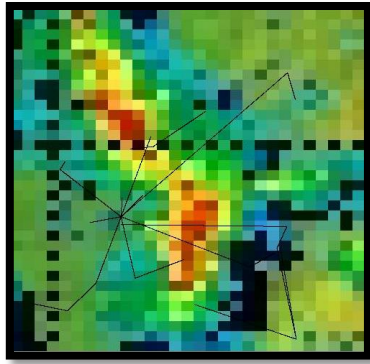
ערך ה- $\alpha$  במקרה נבחר באופן דינמי להיות  $a = 10^{-250}$  כאשר נפסל קו תקשורת 31, מכיוון שהסבירות עבור המדידות המקיימות את תנאי עלו באופן משמעותי  $L_{const} = 0.2 > L_{delta} = 0.24$ .

גם במקרה זה ניתן לראות מתוך טבלה 5.7 כי ללא קווי התקשורת של סלקום תוצאות השערך פחות דומות לתמונת המכ"מ.

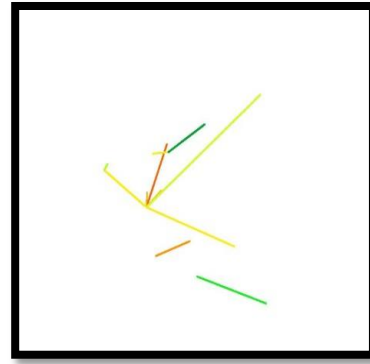
#### 5.7 טבלה

ביצועי המשערכים עבור זמן 13:45

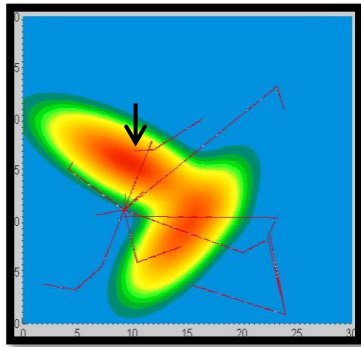
ללא סלקום		עם סלקום		
$\rho_{corr}$	SD	$\rho_{corr}$	SD	
0.24	3.16	0.488	1.69	NML
0.32	2.47	0.371	2.05	ML
0.38	2.44	0.58	1.56	RML



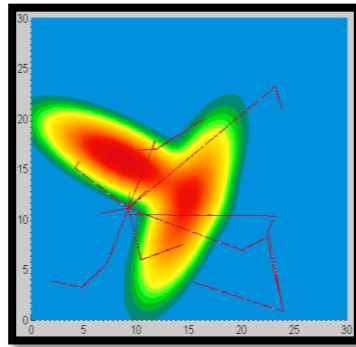
(ב)



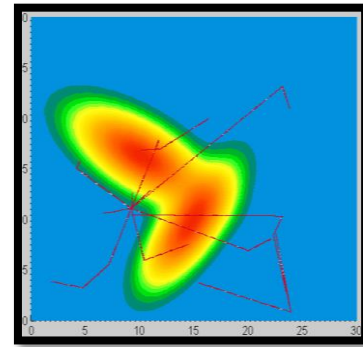
(א)



(ה)

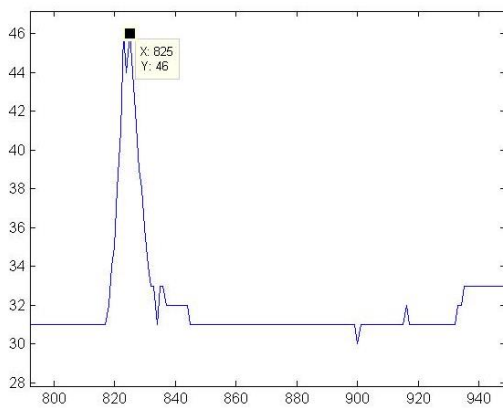


(ד)

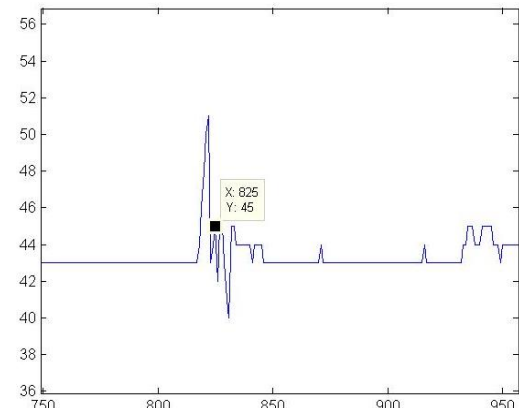


(ג)

איור 5.13 תת איור (א) ערכי הגשם הממוצעים כפי שחושבו מתוך נתוני הניחות של קווי התקשורת. תת איור (ב) תמונת המכ"מ של אזור העניין בשעה 13:45 עם פריסת כל קווי התקשורת. תת איור (ג) משערך ה-RML. תת איור (ד) משערך ה-ML. תת איור (ה) מוצג משערך ה-NML. נזכיר כי רמות הכחול והתכלת בתמונת המכ"מ מייצגות רמות גשם נמוכות מאוד (פחות ממי"מ בודד בשעה).



(ב)



(א)

איור 5.14 מינוס עוצמות הקליטה (RSL) ב [DB] של קו תקשורת פלאפון הכפול כציר הזמן (אינדקס הדגימות ביממה). תת איור (א) עורק מסי 31. תת איור (ב) עורק 37 משמאל.

מאיור 5.15 ניתן לראות כי מתוך ערכי הגשם הממוצעים, שפי שמוצגים בתת איור (א) כבר הבחירה בין גאוס בודד לשני גאוסיינים אינה ברורה כבעבר. מצד אחד ישנו שיא שהוא קו תקשורת כפול 6/7 ומצד שני בחלק הצפוני לא נראית דעיכה ביחס לגאוס, לכן בדקנו והצגנו את התוצאות. מתוך התבוננות במפה המשוערכת במקרה של שני גאוסיינים ניתן להתרשם כי הגאוס הדרומי נכון מבחינת מיקומו וגודלו אך מפספס קלות מבחינת הזווית, וכי הגאוס הצפוני נכון מבחינת הזווית והמיקום אך גובהו טיפה נמוך ועוביו צר ביחס לתמונת המכ"מ, אך סה"כ ביחס למידע שיש מתוך קווי התקשורת במבחן הוויזואלי נראית התאמה טובה. כאשר אנו מתבוננים במפה המשוערכת במקרה של גאוס אחד גם כן נראתה סטייה בזווית אם כי בכיוון השני. סטייה זו הגיונית מכיוון שבמקרה זה הגאוס מושך לכיוון המדידות שהם בצפון מערב.

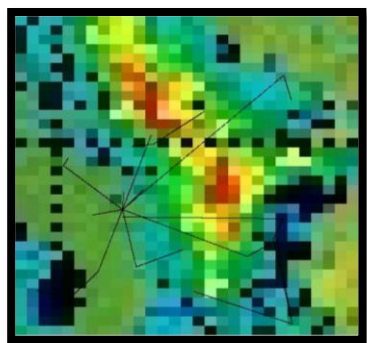
גם מבחינה ויזואלית וגם מבחינת המרחק הריבועי והקורלציות, כפי שניתן לראות בטבלה 5.8, נראה בחירה נכונה יותר של שני גאוסיינים. בנוסף כאשר אנו בודקים את ערך ה- Likelihood עבור משערכי ה- ML במקרה של הגאוס הבודד מול המקרה של שני גאוסיינים נראתה התאמה טובה יותר לבחירת שני הגאוסיינים מכיוון שערך זה גבוהה בעשרה אחוזים לטובת שערך זה.

נשים לב שבאירוע זה ערך  $\alpha = 10^{-550}$  גורם לקו התקשורת 1 (הדרום מזרחי ביותר) לא לעמוד בתנאי הסבירות, אך עבור ערך זה הסבירות של המדידות המקיימות את תנאי הסבירות לא עלה באופן משמעותי:  $L_{const} = 0.2 < L_{delta} = 0.04$  ועל כן נבחר  $\alpha = 0$ .

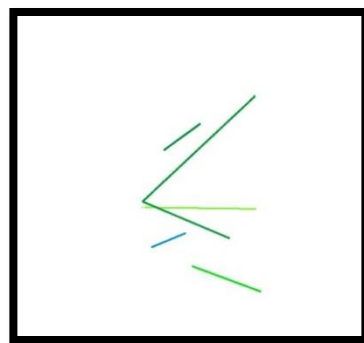
5.8 טבלה

ביצועי המשערכים עבור זמן 13:50

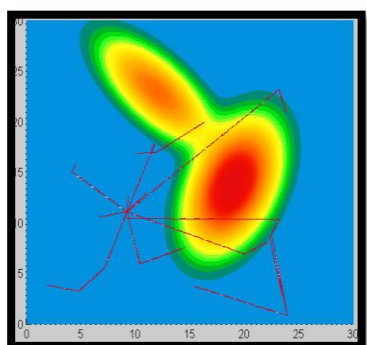
גאוס בודד		שני גאוסים		
$\rho_{corr}$	SD	$\rho_{corr}$	SD	
0.412	1.84	0.4826	1.71	NML
0.412	1.84	0.4816	1.71	ML
0.412	1.84	0.4816	1.71	RML



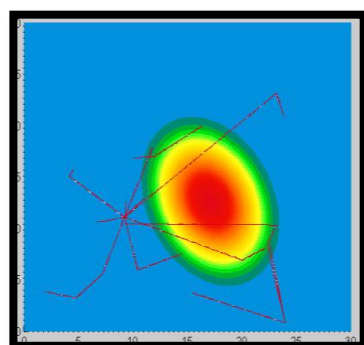
(ב)



(א)



(ד)



(ג)

איור 5.15 תת איור (א) ערכי הגשם הממוצעים כפי שחושבו מתוך נתוני הניחות של קווי התקשורת. תת איור (ב) תמונת המכ"מ של אזור העניין בשעה 13:50 עם פריסת כל קווי התקשורת שנעשה בהם שימוש בתהליך השערך. תת איור (ג) שדה משוערך האופייני לשלושת המשערכים עבור גאוס בודד. תת איור (ד) שדה הגשם האופייני לשלושת המשערכים עבור שני גאוסיינים. נזכיר כי רמות הכחול והתכלת בתמונת המכ"מ מייצגות רמות גשם נמוכות מאוד (פחות ממ"מ בודד בשעה).

### 5.5.8 13:55

מאיור 5.16 ניתן לראות מתמונת ערכי הגשם הממוצעים, כפי שמוצגים בתת איור (א), כי אירוע זה כבר אין הצדקה לחפש שני גאוסיינים (גם כשחיפשנו מצאנו אותם אחד על השני). ניתן לראות מתוך תמונת המכ"מ שלמעשה שני הגאוסיינים מהמקרים הקודמים התחברו לאחד, אך עדיין נשארה צורה מעורבת כך שישנה שבירה דרומה בתחתית הגאוסין. שבירה זו ייצרה תמונה עבור קווי התקשורת של גאוס עם זווית שונה ככל הנראה, אך בסה"כ אפשר לראות התאמה ויזואלית טובה. במקרה זה ישנו שוני בשערך ה-ML למשערך ה-RML. המשערך השני מצא את קו תקשורת 3, (מסומן בחץ שחור בתת איור (ג)) כלא מתאים למודל. ערך הסף נקבע באופן דינמי  $\alpha = 10^{-40}$  כאשר ערך ה-likelihood עלה בעשרים ואחת אחוזים ביותר ופונים צפון דרום חולשים על כמעט אותו שטח גאוגרפי. באירוע זה ערך הגשם התקשורת 2/5,3 שהם המזרחיים ביותר ופונים צפון דרום חולשים על כמעט אותו שטח גאוגרפי. באירוע זה ערך הגשם הממוצע על פי קו תקשורת 3, היה 14 [mm/h] בעוד שבקווי תקשורת 2/5 היה 7 [mm/h]. תופעה זו של חוסר התאמה למודל מתאימה לסוג השני של חוסר התאמה במקרה של קו סורח, ייתכן כי הפרעה מקומית או אולי חוסר סנכרון זמנים אשר גרם לקו זה לקבל ערך שאינו סביר. ניתן אף לראות עפ"י תמונת המכ"מ כי ערך הגשם באזור קווי תקשורת אלה נמוך.

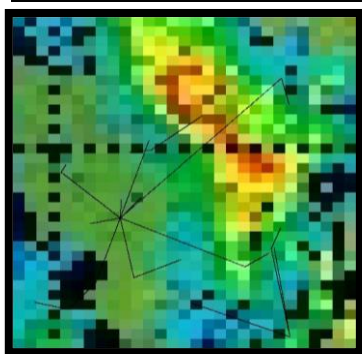


ניתן לראות מתוך טבלה 5.9 התאמה סבירה בערכי הקורלציה והמרחק הריבועי וכן את עדיפותו של משערך ה-RML בערכי הקורולוציה, כמו כן ניתן לראות ששערך בלי קווי התקשורת של סלקום פגעה בביצועי השערך כצפוי.

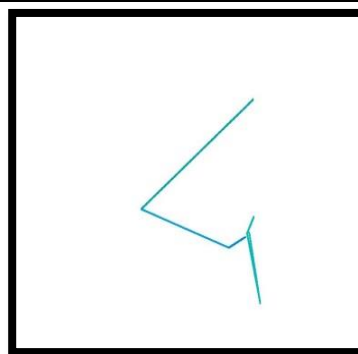
5.9 טבלה

ביצועי המשערכים עבור זמן 13:55

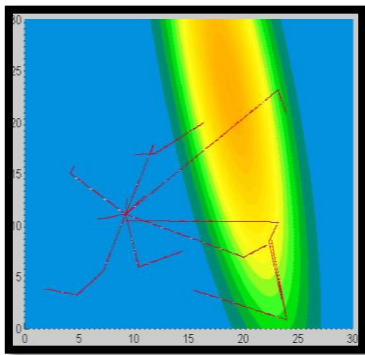
ללא סלקום		עם סלקום		
$\rho_{corr}$	SD	$\rho_{corr}$	SD	
0.35	1.7	0.5155	1.56	NML
0.35	1.7	0.514	1.56	ML
0.35	1.7	0.539	1.56	RML



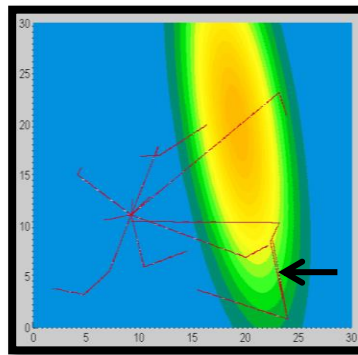
(ב)



(א)



(ד)



(ג)

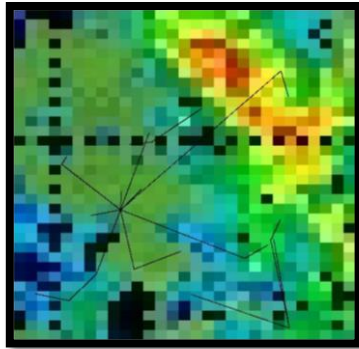
איור 5.16 תת איור (א) ערכי הגשם הממוצעים כפי שחושבו מתוך נתוני הניחות של קווי התקשורת. תת איור (ב) תמונת המכ"מ של אזור העניין בשעה 13:55 עם פריסת כל קווי התקשורת שנעשה בהם שימוש לטובת השערך. תת איור (ג) שדה המשוערך ממשערך ה-RML. תת איור (ד) שדה משוערך אופייני למשערכי ה-NML,ML. נזכיר כי רמות הכחול והתכלת בתמונת המכ"מ מייצגות רמות גשם נמוכות מאוד (פחות ממי"מ בודד בשעה).

מאיור 5.17 ניתן לראות התאמה יפה מבחינת מיקום וצורת הגאוסייין, עם זאת יש סטייה קלה מבחינת הזווית והעוצמה, אך ביחס לכמות קווי התקשורת שחשים את שדה הגשם נראית התאמה טובה. הסטייה בזווית ככל הנראה נובעת מחלקו הדרומי של הגאוסייין שאינו אופייני. גם מבחינה מספרית כפי שמוצגים בטבלה 5.10 ניתן לראות התאמה סבירה. עוד ניתן לראות מתוך טבלה כי בלי קווי תקשורת סלקום ישנה ירידה בדיוקי השערוך. באירוע זה נבחר ערך הסף  $\alpha = 0$  עפ"י האלגוריתם הדינמי. ערך זה נקבע מכיוון שעבור  $\alpha = 10^{-35}$  נפסלו קווי התקשורת 29/36 שהם העורק הכפול הממוקמים בחלק הצפון מזרחי ביותר. אך פסילת קווי תקשורת אלו העלו באופן מינורי את סבירות המדידות המקיימות את תנאי הסבירות  $L_{const} = 0.2 > L_{delta} = 0.04$  ולכן נבחר  $\alpha = 0$ .

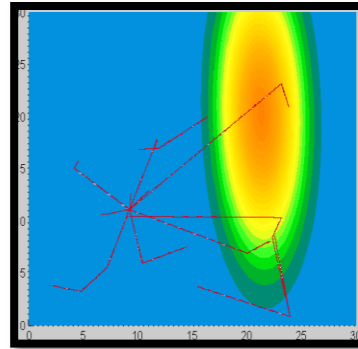
## 5.10 טבלה

ביצועי המשערכים עבור זמן 14:00

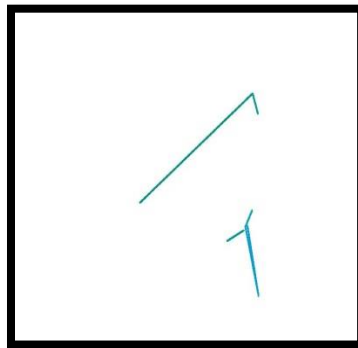
ללא סלקום		עם סלקום		
$\rho_{corr}$	SD	$\rho_{corr}$	SD	
0.452	1.5	0.512	1.4	NML
0.452	1.5	0.512	1.4	ML
0.452	1.5	0.512	1.4	RML



(ב)



(א)



(ג)

איור 5.17 תת איור (א) שדה משוערך אופייני לשלושת המשערכים. תת איור (ב) תמונת המכ"מ של אזור העניין בשעה 14:00 עם פריסת כל קווי התקשורת שנעשה בהם שימוש לטובת השערוך. תת איור (ג) ערכי הגשם הממוצעים כפי שחושבו מתוך נתוני הניחות של קווי התקשורת. נזכיר כי רמות הכחול והתכלת בתמונת המכ"מ מייצגות רמות גשם נמוכות מאוד (פחות ממ"מ בודד בשעה).

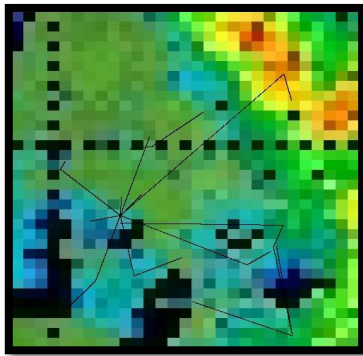
#### 5.5.10 14:05

מתוך איור 5.18 ניתן לראות שכמות המידע לגבי שדה הגשם מזערי ביותר, סה"כ שני קווי תקשורת כפולים חשים גשם, נדגיש כי גם קווי התקשורת שאינם חשים גשם מספקים אינפורמציה. דוגמא לכך ניתן לראות מכך שכאשר לא עשינו שימוש בקווי תקשורת של רשת סלקום קיבלנו תוצאות פחות טובות, למרות שקווי תקשורת אלה למעשה לא חשו גשם כלל. גם עבור אירוע זה קיבלנו שערוך שדה נכון מבחינת המיקום וצורתו, אך עם סטייה זוויתית גדולה. דבר הנובע מכמות האינפורמציה הדלה שיש על שדה הגשם, למעשה מפתח רחב של זוויות עבורן מחיר פונקציות המחיר יהיה פחות או יותר זהה. מתוך טבלה 5.11 ניתן לראות ביצועים סבירים של המשערכים. גם עבור אירוע זה, הסרת קווי תקשורת סלקום פגע בביצועי המשערכים. בשל הכמות המעטה של קווי התקשורת שחשים את השדה נבחר ערך הסף  $\alpha = 0$ .

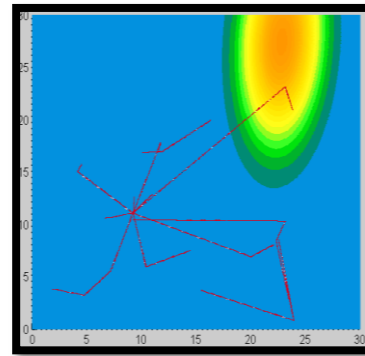
5.11 טבלה

ביצועי המשערכים עבור זמן 14:05

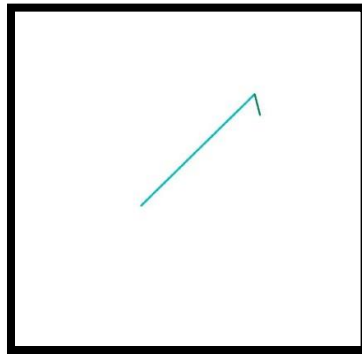
ללא סלקום		עם סלקום		
$\rho_{corr}$	SD	$\rho_{corr}$	SD	
0.27	1.7	0.582	1.4	NML
0.25	1.7	0.578	1.4	ML
0.25	1.7	0.578	1.4	RML



(ב)



(א)



(ג)

איור 5.18 תת איור (א) שדה משוערך אופייני לשלושת המשערכים. תת איור (ב) תמונת המכ"מ של אזור העניין בשעה 14:05 עם פריסת כל קווי התקשורת. תת איור (ג) ערכי הגשם הממוצעים כפי שחושבו מתוך נתוני הניחות של קווי התקשורת. נזכיר כי רמות הכחול והתכלת בתמונת המכ"מ מייצגות רמות גשם נמוכות מאוד (פחות ממ"מ בודד בשעה).

## 5.6 סיכום תוצאות האמת

בפרק זה נענינו לאתגר של יישום המודל הפרמטרי הגאוסי ושערוך הפרמטרים באמצעות שלושת המשערכים שהצגנו בעבודה על אפליקציית מיפוי שדות גשם.

סה"כ שלושת המשערכים הראו התאמה יפה לתמונת המכ"מ ביחס למידע שהיה להם בכל אירוע נתון, נשים לב כי התוצאות הטובות ביותר מבחינה ויזואלית והן מבחינת קורלציות התקבלו כאשר החזית הייתה במרכז תא השטח בו מספר גדול של קווי תקשורת חשו בערכים מגוונים של שדה גשם. ניתן לראות שפרט למקרה בודד (בו קו התקשורת של סלקום מדד שדה שאינו מתאים למודל ולכן הסרתו שיפרה במקצת את ביצועי השערוך) שילוב נתוני רשת סלקום בשערוך שיפרה משמעותית את הביצועים.

היו מקומות בהם נראו בברור ההבדלים בין משעריך ה-ML למשעריך הנאיבי NML, והיו מקומות שהם נתנו את אותו השערוך. היו מקרים שהתרחיש התאים לכך שניהם ייתנו את אותן שדות משוערכים, כמו לדוגמה באירוע בשעה 14:20 כאשר לא היה כמעט שילוב של שתי הרשתות ולכן כל רשת עובדת באופן עצמאי ואז הבדלים בין צורות השערוך היו קטנים. היו מקומות בהם היינו מצפים לראות הבדלים יותר משמעותיים. נזכור כי שני המשערכים לא מתקבלים מתוך משוואה מפורשת של המדידות אלא ע"י מציאת וקטור פרמטרים שמביא את פונקציית המחיר למינימום. אופן מציאת נקודת המינימום זו הוא סוגיה פתוחה אשר תלויה בכוח החישוב וברמת הדיוק של כל יישום. ייתכן כי אופן חיפוש נקודת המינימום הגלובלית שביצענו גרמה לשני המשערכים להתלכד בתוך נקודה לוקלית שהיא אינה המינימום הגלובלי, ולמעשה להציג את אותו השערוך.

ניתן לראות מתוך תוצאות האמת כי משעריך ה-RML האמון על מציאת קווי תקשורת אשר מדידותיהם אינם מתאימים למודל עשה זאת באופן יפה באירועים: בשעות 14:25,14:45,14:55 זיהה משעריך ה-RML מדידות שאינן מתאימות למודל על פי ערך הסף  $\alpha$  נשקבע באופן דינמי.

עבור שלושת המקרים משעריך זה הראה ביצועים טובים יותר ביחס למשערכים האחרים. ניתן היה להבחין בשני סוגי חוסר ההתאמה למודל כפי שניתחנו מוקדם יותר בעבודה זו, בעבור 14:25 נראה כי חוסר התאמה למודל נבע משדה הגשם שאינו התאים לשדה הגאוסי בחלקו, ובשאר האירועים נראה שחוסר ההתאמה נבע מקווי תקשורת סורחים בשל תקלה טכנית, חוסר סנכרון בזמנים או הפרעה אחרת בערוץ.

תוצאות אמת אלו הראו שפיות ליישום גישה פרמטרית ופתרונה באמצעות המשערכים המוצעים עבור אפליקציית מיפוי שדה גשם. לצורך הרחבה וחיזוק יכולת השערוך נדרשת עבודת המשך אשר תעמיק בסוגיות שבתוצאות האמת היו רחוקות מאופטימליות, כמו סנכרון זמנים קביעת סדר מודל וכו'. כמו כן בעבודה זו נבחן רק המודל הפרמטרי הגאוסי ולא נבחנו מודלים פרמטרים אחרים. ניתן להרחיב בקלות כמובן את הבדיקה עבור שדות פרמטרים שונים ואף לבחור את המודל המתאים ביותר. בנוסף ברור כי הוספת ממד הזמן למודל הפרמטרי תאפשר שיפור בשערוך בשל הקשר שאנו רואים בין השדות באירועים סמוכים. ניתן אף לבחור את ערך הסף  $\alpha$  בשיטות שונות ואולי אף לשפר את הביצועים.

## 6 סיכום ועבודות המשך

בעבודה זו הצענו מודל כללי המתאר את הקשר בין שדה פרמטרי כלשהו למדידות של שדה זה כפי שהתקבלו ממגוון סנסורים החשים את השדה באופן שונה זה מזה. הצגנו משערכים שונים למודל זה, הראשון משערך ה-ML המביא למקסימום את פונקציית הסבירות של המדידות בהינתן סט הפרמטרים והשני משערך ה-NML אשר אינו מתייחס לפעולת הקוונטיזציה שמבוצעת על המדידות. הראנו דרך המודל הבסיסי כי ישנו שוני באופי השערוך בין שני המקרים. הראינו דרך פונקציות המחיר את ההבדלים העקרוניים בפעולת השערוך, והסקנו כי ביצועי המשערכים תלויים בערך הפרמטר עצמו, בנוסף הסקנו כי השוני בפעולת השערוך מתחדד בעיקר בשילוב של מדידות בעלות רזולוציית קוונטיזציה שונה. הראנו בסימולציות עבור מספר תרחישים כי למעשה לא ניתן לקבוע איזה משערך טוב יותר במובן השגיאה הריבועית המינימלית עבור ערך של פרמטר אך אם מסתכלים על ביצועים ממוצעים ניתן לראות כי משערך ה-ML מציג את הביצועים הממוצעים הטובים ביותר. עבור יישומים הניתנים למידול ע"י המודל הבסיסי הצענו שני משערכי ביניים, ראינו כי משערך Taylor מראה ביצועים כמעט זהים למשערך ה-ML, אך הוא פשוט יותר לחישוב ואף ניתן לחישוב כפונקציה מפורשת של וקטור המדידות.

יישמנו את המודל הכללי לאפליקציית מיפוי שדה גשם, ראינו על פי תוצאות הסימולציה כי משערך ה-ML עדיף על משערך ה-NML. הראנו את ההבדלים המרכזיים מהמודל בניהם "אפקט האי" אשר מראה את הקשר בין ביצועי המשערכים לגובה שדה הגשם והצגנו את רגישות המשערכים לפרמטרים השונים. בנוסף, הדגמנו מקרים בהם ייתכנו "שגיאות גדולות".

לקראת מעבר לעבודה עם תוצאות האמת הרחבנו את ההתייחסות למקרים בהם יש חוסר התאמה בין המציאות למודל, כאשר המודל המתאר את הקשר בין השדה הפרמטרי למדידה אינו מתאר באופן מלא את המציאות, הראנו את רגישות המשערכים הקיימים למקרים אלו.

מתוך ההבנה שפיתחנו עבור פעולת המשערכים כתלות בצורת פונקציית המחיר שלה, פיתחנו משערך רובסטי לחלק מהמקרים של חוסר התאמה למודל, הצגנו את פונקציית המחיר המתאימה לפעולת השערוך ואף הדגמנו בסימולציה את היתרונות של משערך זה עם פונקציית מחיר זו.

את העבודה סיכמנו עם יישום המודל הכללי על שערוך שדות גשם מתוך נתוני אמת של חברות סלולר (פלאפון וסלקום), המאופיינים בקוונטיזציה ברזולוציה שונה ועבודה בתדרים שונים. ביצענו השוואה בין השדות המשוערכים לבין תמונת מכ"מ הגשם כפי שהתקבל בשדות המטאורולוגי. סה"כ התוצאות היו טובות והראו שפיות של יישום המודל הכללי עבור מיפוי שדות גשם באמצעות קווי תקשורת של חברות סלולר. ראינו התאמה טובה יותר ככל שחזית הגשם נאחזה על ידי קווי תקשורת רבים יותר וכן ראינו שישנם מקרים בהם שערוך ה-RML מציג ביצועים טובים יותר בשל יכולתו להתמודד עם מקרים אמיתיים של חוסר התאמה למודל.

עבודה זו ניתנת להרחבה בכמה תחומים במסגרת עבודות המשך. ראשית, ניתן להוסיף למודל הכללי את ממד הזמן ולבצע שערוך שמתבסס לא רק על המדידות באותו הרגע אלא גם על מדידות עבר. הוספת ממד הזמן אל המודל הכללי תאפשר שילוב מיטבי של סנסורים בעלי בסיסי זמן שונים, כפי שראינו בדוגמא בין רשת סלקום לרשת פלאפון.

בנוסף, ניתן להרחיב את המודל הכללי למודל פרמטרי היברידי, כאשר המודל של השדה הפיזיקלי הוא פרמטרי אך אחד או יותר מהפרמטרים הם משתנים אקראיים. לדוגמה ניתן לחשוב על מידול של שדה גשם כגאוס דו מימדי אך גובהו של הגאוס הוא משתנה אקראי. (כפי שניתן לראות ב [48] כאשר ניתנת התפלגות פילוג לערך הגשם כלוג נורמל או כפילוג גמא תלוי בערך הגשם עצמו).

לצורך מיפוי רחב של שדה גשם ניתן להרחיב את העבודה להשגת חלוקה נכונה של המרחב לתאים שונים של פענוח, כאשר בחירת התא משתנה כפונקציה של המדידות. בנוסף הצענו בעבודה זו שיטה לבחור מודל מתאים מתוך מגוון מודלים אפשריים. ניתן להעמיק בנושא זה כולל סימולציות ותוצאות אמת, ולבחון מבחנים סטטיסטיים לבחירת מודל וסדר מודל משיקול משולב של דיוק השערוך וסיבוכיות חישוב.

עבודה זו מאפשרת באופן תיאורטי שערך משותף של שדה גשם ממדידות של קווי תקשורת, מדי גשם ונתוני מכ"מ מזג אוויר. בפועל יישמנו את המודל רק עבור קווי תקשורת בעל אופי שונה (תדרי עבודה ורזולוציית קוונטיזציה שונה), ניתן להרחיב את היישום. שילוב מד גשם הוא טריוויאלי בהנחה כי עובדים במדי גשם המעודכנים כל דקה, נותר רק לקבוע את שונות רעש המדידה עבור כל אחד מהם ולהכניסם למודל לטובת שערך אחוד, שילוב מדידות המכ"מ מעט יותר סבוך. שילוב עם מדידות מכ"מ ניתן לבצע בשתי גישות, הראשונה לעבוד עם הנתונים הגולמיים של המכ"מ (row data) ולתאר דרך פונקציית החישה  $s_i(f(x, y; \theta))$  את הקשר בין וקטור הפרמטרים למדידת המכ"מ. אחרי הגדרת פונקציית החישה נותר להגדיר את שונות רעש המדידה ולהכניס למודל הכללי ולקבל את השערך האחוד. אפשרות נוספת ואף פשוטה יותר היא שילוב מדידות המכ"מ לאחר שאלו פענוחו לערכי גשם כפי שמתקבלת מתמונת המכ"מ ולהסתכל על ערכי הגשם במרחב כאל מדי גשם נקודתיים במיקום המיוצג ע"י כל פיקסל, כמובן שניתן לשנות את שונות רעש המדידה בהתאם לשגיאות המכ"מ כתלות במרחק ממנו.

עבודות נוספות יכולות להכניס בחשבון את תופעת אנטנה רטובה כחלק מהמודל הכללי ואף לשלבו בהרחבה של המודל הזמני. (כפי שראינו כי תופעה זו משתנה בזמן)

ניתן אף להרחיב ולהעמיק בנושא ה- *mismodeling*. ניתן לבחון משערך זה במגוון רחב מאוד של יישומים, להבין את החוזקות והחולשות שלו ואת יכולתו לשפר את ביצועי השערך במקרים של חוסר התאמה בין המציאות למודל. בנוסף, ניתן להציע דרכים לבחירת ערך הסף  $\alpha$ . ניתן גם לשכלל משערך זה ולהרחיבו כך שלא יתעלם ממדידות שאינן מתאימות למודל אלא יעשה בהן שימוש כלשהו.

## 7 נספחים

### נספח א'

חישוב נגזרת פונקציית הנראות לפי הפרמטר  
בנפסח זה נחשב את הנגזרת של פונקציית הנראות עפ"י  $\theta$ :  $\frac{\partial L(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta}$

בשל לינאריות הנגזרת:

$$(7.1) \quad \frac{\partial L(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L_i(z_i; \theta)}{\partial \theta}$$

לכן נחשב ראשית את הנגזרת עבור פונקציית הנראות למדידה בודדת.

$$(7.2) \quad \frac{\partial L_i(z_i; \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial \log \left( \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} f_N(y; \theta) dy \right)}{\partial \theta} = \frac{\partial \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} f_N(y; \theta) dy}{\int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} f_N(y; \theta) dy}$$

לצורך כך נעשה חישוב ביניים:

$$\frac{\partial \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} f_N(y; \theta) dy}{\partial \theta} = \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} \frac{(y - \theta) f_N(y; \theta)}{\sigma_i^2} dy = \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} \frac{y f_N(y; \theta)}{\sigma_i^2} dy - \theta \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} \frac{f_N(y; \theta)}{\sigma_i^2} dy$$

נציג זאת במשוואה (7.2) ונקבל:

$$(7.3) \quad \frac{\partial L_i(z_i; \theta)}{\partial \theta} = \frac{\int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} \frac{y f_N(y; \theta)}{\sigma_i^2} dy}{\int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} f_N(y; \theta) dy} - \frac{\theta}{\sigma_i^2}$$

כעת נציב את משוואה (7.2) במשוואה (7.3) ונקבל:

$$(7.4) \quad \frac{\partial L(\mathbf{z}; \theta)}{\partial \theta} = \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^N \frac{\int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} y \cdot f_N(y; \theta) dy}{\sigma_i^2 \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} f_N(y; \theta) dy} \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \right)^{-1} - \theta$$



## נספח ב'

בנספח זה נחשב את הנגזרת השנייה לפונקציית הנראות לפי z.

הערה: במהלך הנספח הנגזרת מתייחסת למשתנה  $z_i$  כרציף בתהליך הגזירה.

$$\frac{\partial^2 L(z_i; \theta)}{\partial z_i^2} = \frac{\partial^2 \log \left( \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} f_N(y; \theta) dy \right)}{\partial z_i^2}$$

כאשר  $g' = \frac{\partial g}{\partial z_i}$  נגדיר כי  $f_N(y; \theta) = N(\theta, \sigma_i^2)$

ראשית נחשב את הנגזרת הראשונה

$$(7.5) \quad \frac{\partial \log \left( \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} f_N(y; \theta) dy \right)}{\partial z_i} = \frac{f_N \left( z_i + \frac{\Delta_i}{2}; \theta \right) - f_N \left( z_i - \frac{\Delta_i}{2}; \theta \right)}{\int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} f_N(y; \theta) dy}$$

וזאת מתוך הזהות הבאה:

$$(7.6) \quad \frac{\partial \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy}{\partial x} = f(x, b(x)) \cdot b'(x) - f(x, a(x)) \cdot a'(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} f_x(x, y) dy$$

כאשר במקרה שלנו  $b(x) = z_i + \frac{\Delta_i}{2}$ ;  $b'(x) = 1$ ;  $a(x) = z_i - \frac{\Delta_i}{2}$ ;  $a'(x) = 1$ ;  $f_x(x, y) = 0$

כעת נגזור את משוואה (7.5) ונקבל:

$$(7.7) \quad \frac{A'_1 \cdot \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} f_N(y; \theta) dy - \left( \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} f_N(y; \theta) dy \right)' A_1}{\int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} f_N(y; \theta) dy}$$

$$(7.8) \quad ; A_1 = f_N \left( z_i + \frac{\Delta_i}{2}; \theta \right) - f_N \left( z_i - \frac{\Delta_i}{2}; \theta \right) \quad A'_1 = f'_N \left( z_i + \frac{\Delta_i}{2}; \theta \right) - f'_N \left( z_i - \frac{\Delta_i}{2}; \theta \right)$$

$$(7.9) \quad f'_N(m; \theta) = \frac{(m - \theta)}{\sigma_i^2} f_N(m; \theta)$$

מתוך (7.8) ניתן לראות כי:

$$(7.10) \quad \left( \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} f_N(y; \theta) dy \right)' = A_1$$

לכן אם נציג את (7.10) ב (7.7) ונקבל:

$$(7.11) \quad \frac{\partial^2 L_i(z_i; \theta)}{\partial z_i^2} = \frac{(A_1') \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} f_N(y; \theta) dy - (A_1)^2}{\left( \int_{z_i - \frac{\Delta_i}{2}}^{z_i + \frac{\Delta_i}{2}} f_N(y; \theta) dy \right)^2}$$

## 7.1 טבלה

מיקום שתי קצוות הליניקים ביחס לנקודת הרפרנס  $P_{\text{reff}}$  כפי שמוצגת במשוואה (3.14)

$x_1$ [km]	$y_1$ [km]	$x_2$ [km]	$y_2$ [km]
24.55	25.59	24.68	23.66
24.68	23.66	24.55	25.59
24.55	25.59	25.75	24.82
25.75	24.82	24.55	25.59
24.55	25.59	26.60	27.29
26.60	27.29	24.55	25.59
24.55	25.59	21.56	23.62
21.56	23.62	24.55	25.59
24.55	25.59	17.81	29.99
17.81	29.99	24.55	25.59
24.55	25.59	23.33	31.97
23.33	31.97	24.55	25.59
24.55	25.59	29.35	31.90
29.35	31.90	24.55	25.59
24.55	25.59	20.66	19.26
20.66	19.26	24.55	25.59
24.55	25.59	16.38	22.90
16.38	22.90	24.55	25.59
25.58	19.14	28.17	16.91
28.17	16.91	25.58	19.14
24.55	23.65	25.58	19.14
25.58	19.14	24.55	23.65
17.67	29.99	11.74	31.40
11.74	31.40	17.67	29.99

- [1] M. J. Caruso, "Application of magnetic sensors for low cost compass Systems," *IEEE Symposium on Position Location and Navigation*, pp. 177-184, 2000.
- [2] S. Marshall, "Vehicle detection using a magnetic field sensor," *IEEE Trans. Veh. Tech*, pp. 65-68, 1978.
- [3] S. Bapat, V. Kulathumani and A. Arora, "Reliable estimation of influence fields for classification and tracking in unreliable sensor networks," *24th IEEE Symposium on Reliable Distributed Systems*, pp. 60-72, 2005.
- [4] A. Nehorai, B. Porat and E. Paldi, "Detection and localization of vaporemittng sources," *IEEE Transactions on Signal Processing*, pp. 243-253, 1995.
- [5] C. Capsoni, F. Fedi and A. Paraboni, "A comprehensive meteorologically oriented methodology for the prediction of wave propagation parameters in telecommunication applications beyond 10 GHz," *Radio Sci*, vol. 22, no. 3, p. 387-393, 1987.
- [6] C. Capsoni, F. Fedi, C. Magistroni, A. Paraboni and A. Pawlina, "Data and theory for a new model of the horizontal structure of rain cells for propagation applications," *Radio Sci*, vol. 22, no. 3, p. 395-404, 1987.
- [7] C. Capsoni and M. D'Amico, "Morphological description of the rain structures in the Padana valley," *in Proc. ERAD*, p. 541-544, 2004,.
- [8] L. Féral, H. Sauvageot, L. Castanet and J. Lemorton, "HYCELL—A new hybrid model of the rain horizontal distribution for propagation studies: 1. Modeling of the rain cell," *Radio Sci*, vol. 38, no. 3, 2003.
- [9] H. Yakir and E. Morin, "Hydrologic response of a semi-arid watershed to spatial and temporal characteristics of convective rain cells," *Hydrol. Earth*, vol. 15, pp. 393-404, 2011.
- [10] E. Morin, D. C. Goodrich, R. A. Maddox, X. Gao, H. V. Gupta and S. Sorooshian, "Spatial patterns in thunderstorm rainfall events and their coupling with watershed hydrological response," *Advances in Water Resources*, vol. 29, no. 6, pp. 843-860, 2006.
- [11] M. Montopoli and F. S. Marzano, "Maximum-Likelihood Retrieval of Modeled Convective Rainfall Patterns from Midlatitude C-Band Weather Radar Data," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 45, no. 7, pp. 2403-2416, 2007.

- [12] A. Swami, Q. Zhao, Y. W. Hong and L. Tong, *Wireless Sensor Networks: Signal Processing and Communications*, John Wiley & Sons, 2007.
- [13] H. Messer, A. Zinevich and P. Alpert, "Environmental monitoring by wireless communication networks," *Science* 312, p. 5774, 2006.
- [14] J. D. Michaud and S. Sorooshian, "Effect of rainfall-sampling errors on simulations of desert flash floods," *Water Resour. Res.* pp. 30(10), 2765–2775, 1994.
- [15] O. P. Prat and A. P. Barros, "Combining a rain microphysical model and observations: implication for radar rainfall estimation," *IEEE Radar Conference*, pp. 1-4, 2009.
- [16] D. Giuli, A. Toccafondi, G. B. Gentili and A. Freni, "Tomographic reconstruction of rainfall fields through microwave attenuation measurements," *Journal of Applied Meteorology*, pp. vol.30,issue 9, pp.1323-1340, 1991.
- [17] Y. Liberman, *M.S.Optimal Recovery of Rain Field Maps Using Measurements From Wireless Sensors Network*, 2013.
- [18] T. L. Frey, "The effects of the atmosphere and wrather on the performance of a mm-Wave communication link," *applied microwave and wireless*, vol. 11, pp. 76-81, 1999.
- [19] R. Olsen, D. V. Rogers and D. B. Hodge, "the  $a^b$  relation in the calculation of rain attenuation," *IEEE Transaction, Antenna Propagation*, pp. 318-329, 1978.
- [20] T. ors, Y. chotikapong and Z. sum, "Bisante deliverable 2.2," *GEO Satellite Network Characteristics*, 1999.
- [21] I. F. Akyildiz, W. Su, Y. Sankarasubramaniam and E. Cayirci, "Wireless sensor networks: a survey," *Computer Networks*, vol. 38, no. 4, pp. 393-422, 2002.
- [22] T. Bokareva, W. Hu, S. Kanhere, B. Ristic, N. Gordon, T. Bessell, M. Rutten and S. Jha, "Wireless sensor networks for battlefield surveillance," *In Proceedings of the land warfare conference*, 2006.
- [23] N. Patwari, A. O. Hero, M. Perkins, N. S. Correal and R. J. O'Dea, "Relative location estimation in wireless sensor networks," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 51, no. 8, pp. 2137-2148, 2003.
- [24] J. Li and G. AlRegib, "Distributed Estimation in Energy-Constrained Wireless Sensor Networks," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 57, no. 10, pp. 3746-3758, 2009.
- [25] J. J. Xiao and Z. Q. Luo, "Decentralized estimation in an inhomogeneous sensing environment," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 51, no. 10, pp. 3564-3575, 2005.

- [26] A. Ribeiro and G. B. Giannakis, "Bandwidth-constrained distributed estimation for wireless sensor Networks-part I: Gaussian case," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 54, no. 3, pp. 1131-1143, 2006.
- [27] N. Ruixin and P. K. Varshney, "Target Location Estimation in Sensor Networks With Quantized Data," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 54, no. 12, pp. 4519-4528, 2006.
- [28] N. Patwari and A. O. Hero III, "Using Proximity and Quantized RSS for Sensor," *Proceeding WSNA '03 Proceedings of the 2nd ACM international conference on Wireless sensor networks and applications*, pp. 20-29, 2003.
- [29] D. Schabus, T. Zemen and M. Pucher, "Distributed Field Estimation Algorithms in Vehicular Sensor Networks," *Vehicular Technology Conference (VTC Spring), 2011 IEEE 73rd*, vol. 5, no. 1, pp. 15-18, 2011.
- [30] Y. Wang, P. Ishwar and V. Saligrama, "One-Bit Distributed Sensing and Coding for Field Estimation in Sensor Networks," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 56, no. 9, pp. 4433-4445, 2008.
- [31] N. A. Schmid, Alkhweldi Marwan and C. Valenti Matthew, "Distributed Estimation of a Parametric Field Using Sparse Noisy Data," *Proc. of Military Communications Conference. 2012*, pp. 1-6, 2012.
- [32] S. Talarico, N. Schmid, M. Alkhweldi and M. Valenti, "Distributed Estimation of a Parametric Field: Algorithms and Performance Analysis," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 62, no. 5, pp. 1041-1053, 2014.
- [33] O. Goldshtein, H. Messer and A. Zinevich, "Rain Rate Estimation Using Measurements From Commercial Telecommunications Links," *Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 57, no. 4, pp. 1616-1625, 2009.
- [34] A. Zinevich, H. Messer and P. Alpert, "Frontal Rainfall Observation by a Commercial Microwave Communication Network," *Journal of Applied Meteorology & Climatology*, vol. 7, p. 48, 2009.
- [35] A. Zinevich, H. Messer and P. Alpert, "Prediction of rainfall intensity measurement errors using commercial microwave communication links," *Atmospheric Measurement Techniques*, vol. 5, no. 3, pp. 1385-1402, 2010.
- [36] S. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*, Upper Saddle River NJ: Prentice-Hall, 1998.
- [37] W. Bernard, I. Kollar and M. C. Liu, "Statistical theory of quantization," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 45, no. 2, pp. 353-361, 1996.

- [38] A. J. Jerri, "The Shannon sampling theorem—Its various extensions and applications: A tutorial review," *Proceedings of the IEEE*, vol. 65, no. 11, pp. 1565-1596, 1977.
- [39] J. Nelder and R. Mead, "A Simplex Method for Function Minimization," *The Computer Journal*, vol. 7, no. 4, pp. 308-313, 1965.
- [40] D. Cherkassky, J. Ostrometzky and H. Messer, "Precipitation classification using measurements from commercial microwave links," *IEEE Geoscience and Remote Sensing Society*, 2013.
- [41] A. R. Rahimi, A. R. Holt, G. J. G. Upton and R. J. Cummings, "Use of dual-frequency microwave links for measuring path-averaged rainfall," *J. Geophys. Res*, 2003.
- [42] M. Schleiss and A. Berne, "Identification of Dry and Rainy Periods Using Telecommunication Microwave Links," *Geoscience and Remote Sensing Letters, IEEE*, vol. 7, no. 3, pp. 611-615, 2010.
- [43] Z. Wang, M. Schleiss, J. Jaffrain, A. Berne and j. Rieckermann, "Using markov switching models to infer dry and rainy periods from telecommunication microwave link signals," *Atmos. Meas. Tech.*, vol. 5, pp. 1847-1859, 2012.
- [44] M. M. Z. Kharadly and R. Ross, "Effect of wet antenna attenuation on propagation data statistics," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 49, no. 8, pp. 1183-1191, 2001.
- [45] A. Zinevich, H. Messer and P. Alpert, "Prediction of rainfall intensity measurement errors using commercial microwave communication links," *Atmos. Meas*, no. 3, pp. 1385-1402, 2010.
- [46] H. Leijnse, R. Uijlenhoet and J. N. M. Stricker, "Microwave link rainfall estimation: Effects of link length and frequency, temporal sampling, power resolution, and wet antenna attenuation," *Advances in Water Resources*, vol. 31, no. 11, pp. 1481-1493, 2008.
- [47] M. Schleiss, J. Rieckermann and A. Berne, "Quantification and Modeling of Wet-Antenna Attenuation for Commercial Microwave Links," *Geoscience and Remote Sensing Letters, IEEE*, vol. 10, no. 5, pp. 1195-1199, 2013.
- [48] F. Moupfouma, "Model of rainfall-rate distribution for radio system design," *Microwaves, Antennas and Propagation, IEE Proceedings H*, vol. 132, no. 1, pp. 39-43, 1985.
- [49] D. M. Atlas and C. Ulbrich, "The physical basis for attenuation-rainfall relationships and the measurements of rainfall parameters by combined attenuation and radar method," 1974.
- [50] S. Kumar, F. Zhao and D. Shepherd, "Special Issue on Collaborative Information Processing," *IEEE Signal Process*, 2002.

# Abstract

In a wide range of applications a combination of measurements by a large number of sensors is needed for a common cause. The range of sensors network in general and of wireless sensors network in particular has accelerated in the last two decades, and the variety of applications is only increasing.

Our research addresses the scenario in which different sensors in a sensors network sense, in various ways, the same physical field. We focus on presenting a general model which enables the integration of measurements from these sensors for a united parameter estimation of a spatial field. In this work we allow each sensor to sense the field differently and its measurements to be quantized with different quantization resolution. We present the Maximum Likelihood (ML) estimator for the general model and the Naïve Maximum Likelihood (NML) estimator, which disregards the quantization.

We study in details the special case where the physical field is a linear parameter field, in order to study how the quantization affects the ML estimator. The linear case can also be compatible for certain applications. For this case we demonstrate the ML and NML estimation performances in theory, as well as by simulations. We also suggest for this case two estimators simpler than the MLE, with average performance which is lower bounded by that of the MLE and upper bounded by that of the NML.

For the general model we expand our observation for scenarios of mismodeling, where the model does not reflect reality; for this purpose we developed the Robust ML (RML) estimator.

We apply the general model to rain field estimation, where the rain field is modeled to be a 2D Gaussian field uniquely characterized by 6 parameters. We simulated the measurements as taken from sensors which are micro-wave links used by two different cellular providers (following protocols used by Pelephone and Cellcom in Israel). The nature of sensing of each link is different as a result of different frequencies used, and the sensors measurements go through quantization in different resolution for each cellular network. We analyze the performances of the estimators for this scenario by simulations.

We summarize the research by estimation of a rain field using real data received by cellular providers (Pelephone and Cellcom), comparing the estimated fields with the weather radar map as received in the Meteorological Institute at that time. These real life results show feasibility of applying the general model to this case and demonstrate the advantage of the robust estimator in cases of mismodeling.



The Iby and Aladar Fleischman Faculty of Engineering  
The Zandman-Slaner School of Graduate Studies  
The Department of Electrical Engineering - Systems

# Parameter Estimation of a Spatial Field from Quantized Non- linear Noisy Samples with Application to Rain Field Mapping

Thesis submitted toward the degree of  
Master of Science in Electrical and Electronic Engineering

by

**Elad Heiman**

This research was carried out in The School of Electrical Engineering  
The Department of Electrical Engineering - Systems  
Under the supervision of Prof. Hagit Messer-Yaron

July, 2014



The Iby and Aladar Fleischman Faculty of Engineering  
The Zandman-Slaner School of Graduate Studies  
The Department of Electrical Engineering - Systems

# Parameter Estimation of a Spatial Field from Quantized Non-linear Noisy Samples with Application to Rain Field Mapping

Thesis submitted toward the degree of  
Master of Science in Electrical and Electronic Engineering

by

Elad Heiman

July, 2014